SALVAGUARDA

RESOLUÇÃO COMENTADA

MAIO

Matemática

SALVAGUARDA
Programa nacional de educação

*Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de **maio**.*

Resolução comentada da lista de maio - matemática

Frentes 1 e 2: Matemática Básica, Conjuntos e Funções

1. (CETREDE - 2016 - Prefeitura de Itapipoca - CE) Um grupo de 24 pedreiros faz 2/5 de uma casa em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. Em quantos dias a obra estará terminada, se 4 pedreiros foram dispensados e o regime de trabalho diminuiu uma hora por dia?
   (a) 12.
   (b) 21.
   (c) 8.
   (d) 11.
   (e) 18.

Resolução: Ao ler a questão, observe que se trata de proporções entre as quantidades de dias, parte da casa concluída, quantidade de pedreiros trabalhando e a quantidade de horas de trabalho por dia. Deste modo, podemos deduzir a questão se trata de uma regra de três composta. Então, vamos organizar as informações numa tabela. Antes, vejamos as quantidades que temos de cada coisa depois das mudanças pedidas no enunciado. Quando se fala de 4 pedreiros sendo dispensados, sendo que antes havia 24, sabemos que a quantidade agora será de 20 pedreiros. Sabendo que 2/5 da casa já está pronta, falta terminar 3/5 da obra. Como queremos saber a quantidade de dias que terminaremos a obra, chamemos de x. Por fim, a informação de que o regime de trabalho diminuiu uma hora por dia nos leva a concluir que agora os 20 pedreiros trabalharão 6 horas por dia, já que antes trabalhavam 7. Agora, podemos montar a nossa tabela com estas informações:

Pedreiros	Fração da casa	dias	horas por dia
24	2/5	10	7
20	3/5	x	6

Feito isto, agora precisamos saber quais grandezas são diretamente proporcionais aos dias de duração da construção da casa. Como diminuímos a quantidade de pedreiros, então a quantidade de dias de trabalho tende a aumentar, portando a **quantidade de pedreiros é inversamente proporcional à quantidade de dias**. Além disso, como a fração da casa que falta acabar aumenta, a quantidade de dias para fazer isso também aumentará. Então, A **a fração da casa é diretamente proporcional à quantidade de dias**. Ainda, quando diminuímos a quantidade de horas de trabalho por dia, isso faz com que a quantidade de dias para concluir o serviço aumente, daí **a quantidade de horas por dia é inversamente proporcional à quantidade de dias**. Assim, temos que usar essa informação para pensar nas proporções de modo a inverter as frações que se tratam de grandezas inversamentes proporcionais. Deste modo, segue que:

$$\frac{10}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{2/5}{3/5} \cdot \frac{6}{7}$$

Agora, é só fazer conta. Note que $\frac{2/5}{3/5} = \frac{2/5}{3/5} \cdot 1$ e podemos escrever 1 como $\frac{5}{5}$. Ou seja, temos que $\frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$. O que estou fazendo é justificando o motivo que justifica nós "cortarmos"os 5's do denominardor das frações. Assim, vamos tentar resolver evitando fazer contas desnecessárias:

$$\frac{10}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 6}{24 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot \overbrace{2 \cdot 2}^{4} \cdot 6}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{10}{3 \cdot 7}$$

Portanto, temos que:

$$10 \cdot x = 3 \cdot 7 \cdot 10 \overset{\div 10}{\Rightarrow} x = 3 \cdot 7 = 21.$$

Logo, a obra estará termionada em 10 dias. Alternativa (b).

2. (Diretoria de Ensino de Andradina/SP - 2025) Um lote com certa quantidade de livros será dividido em caixas, cada caixa com o mesmo número de livros. É possível colocar 16 livros em cada caixa, mas também é possível colocar 18 livros em cada caixa, e de todo modo não sobrará livros fora das caixas. Sabendo que esse lote possui menos de 150 livros, o número de livros desse lote é
   (a) 148.
   (b) 144.
   (c) 128.
   (d) 126.

Resolução: Essa questão quer saber se conseguimos extrair o conceito de *mmc* vindo do texto. Você poderia fazer do jeito mais tradicional fatorando o 18 e o 16, mas vamos por um outro caminho. Observe que se tivéssemos 10 caixar com 16 livros cada, teríamos 160 livros. Se fossem 9 caixas com 16 livros, teríamos $160 - 16 = 144$. Como esse valor é menor que 150, vamos prestar atenção nele. Assim, $16 \cdot 9 = 144$. Vamos tentar "quebrar"esse número como um múltiplo de 18. Note que $144 = 16 \cdot 9 = 8 \cdot 2 \cdot 9 = 8 \cdot 18$. Portanto, 144 é múltiplo comum de 16 e 18. Será que é o menor? Veremos que sim, pois $16 = 2^4$ e $18 = 2 \cdot 3^2$ e já que o $mmc(16, 18)$ é o produto dos fatores primos de 16 e de 18 considerando a menor quantidade de fatores que contemplam os dois números, temos que $mmc(16, 18) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Portanto, alternativa (b).

3. (ENEM 2015 - 1ª APLICAÇÃO) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.
Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir
   (a) 105 peças.
   (b) 120 peças.
   (c) 210 peças.
   (d) 243 peças.
   (e) 420 peças.

Resolução: Observe que o que está se pedindo para fazer é dividir todas estas tábuas de modo que todas fiquem com o mesmo tamanho e que esse tamanho seja o maior possível, ou seja, temos que calcular o *mdc* entre os 3 possíveis tamanhos de tábuas. Para calcular o $mdc(540, 810, 1080)$ você pode fazer fatorando daquele modo tradicional dividindo sempre os 3 ao mesmo tempo. O que vamos fazer aqui é escrever todos esse números como produto de seus fatores primos e tomar o maior produto possível de dividir todos eles ao mesmo tempo. Prossigamos:

$$\begin{gathered}540 = 270 \cdot 2 = 27 \cdot 10 \cdot 2 = 3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5\\ 810 = 81 \cdot 10 = 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5\\ 1080 = \underbrace{108}_{99+9} \cdot 10 = 9(11+1) \cdot 10 = 9 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5\end{gathered}$$

Assim, temos que $mdc(540, 810, 1080) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$. Então, vamos dividir tais tábuas em outras menores com 270 cm? Não tão rápido, caríssimos. A gente não pode cair nessa pegadinha desse jeito hehe. Observe que o enunciado nos diz que o comprimento tem que ser menor do que 2 m, isto é, menor do que 200 cm. Ops... Então não dá para cortar pedaços de 270 cm. Assim, precisamos achar meio que o segundo maior divisor comum de 540, 810 e 1080. Mas note que para isso, basta dividir 270 por 2, já que esse é o menor fator que podemos tirar do $mdc(540, 810, 1080)$ para formar o segundo maior divisor desses número. Logo, temos que cortar as tábuas em menores de 135 cm (observe que $135 = 3^3 \cdot 5$, já que só tiramos um fator 2 do mdc). Assim, usando as fatorações que já fizemos anteriormente, temos que:

$$\begin{gathered}
1 \text{ tábua de } 540 \text{ irá gerar } 4 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm, pois } 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4 \cdot 135, \\
1 \text{ tábua de } 810 \text{ irá gerar } 6 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm, pois } 810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 6 \cdot 135, \\
1 \text{ tábua de } 1080 \text{ irá gerar } 8 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm, pois } 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8 \cdot 135.
\end{gathered}$$

Agora, basta considerar a quantidade de cada tábuas que tínhamos no início do problema. Assim:

$$\begin{gathered}
40 \text{ tábuas de } 540 \text{ irá gerar } 40 \cdot 4 = 160 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm}, \\
30 \text{ tábuas de } 810 \text{ irá gerar } 30 \cdot 6 = 180 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm}, \\
10 \text{ tábuas de } 1080 \text{ irá gerar } 10 \cdot 8 = 80 \text{ tábuas de } 135 \text{ cm}.
\end{gathered}$$

Portanto, o carpinteiro deverá produzir $160 + 180 + 80 = 340 + 80 = 420$ peças. Alternativa (e).

4. (VUNESP - 2019 - Câmara de Monte Alto - SP) Em uma brincadeira há três apitos com sons diferentes. O apito A é acionado a cada 3 minutos. O apito B é acionado a cada 5 minutos e o apito C é acionado a cada 7 minutos. Exatamente às 14 horas e 12 minutos, o apito B foi acionado e, um minuto após, são acionados, simultaneamente, os apitos A e C. Essa situação começará novamente às
   (a) 15 horas e 24 minutos.
   (b) 15 horas e 57 minutos.
   (c) 16 horas e 19 minutos.
   (d) 16 horas e 32 minutos.
   (e) 17 horas e 15 minutos.

Resolução: Como A (que é acionado a cada 3 minutos) e C (que é acionado a cada 7 minutos) precisam ser acionados juntos novamente, precisamos saber o $mmc(3, 7)$. Como 3 e 7 são primos entre si, então $mmc(3, 7) = 3 \cdot 7 = 21$. Então, a cada 21 minutos, A e C serão acionados simultaneamente. Precisamos, agora, observar quando que B será acionado um minuto antes de A e C serem. Bom, como B é acionado a cada 5 minutos e foi acionado às 14 horas e 12 minutos, então B é acionado quando os minutos possuem unidade 2 ou 7, pois:

$$14h12min \overset{+5 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h17 \overset{+5 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h22min \overset{+5 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h27h \overset{+5 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h32 \overset{+5 \text{ minutos}}{\longrightarrow} ...$$

Assim, basta que observemos quando que A e B serão acionados de modo que ao subtrairmos 1 minutos, a unidade dos minutos seja 2 ou 7, ou seja, temos que encontrar um horário referente aos toques de A e C em que a unidade dos minutos seja 3 ou 8. Como A e C foram acionados às 14 horas e 13 minutos, temos:

$$14h13min \overset{+21 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h34 \overset{+21 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 14h55 \overset{+21 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 15h16 \overset{+21 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 15h37 \overset{+21 \text{ minutos}}{\longrightarrow} 15h58.$$

Portanto, B será acionado às 15 horas e 57 minutos, repetindo a situação inicial. Logo, a alternativa correta é a letra (b).

5. (CN 2003) Se $mmc(x, y) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $mdc(x, y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?
   (a) 16
   (b) 8
   (c) 6
   (d) 4
   (e) 2

Resolução: Não é porque essa questão é do Colégio Naval que ela é impossível. Vamos nessa! Observe que $mdc(x, y)$ tem que dividir x. Além disso, $mmc(x, y)$ tem que ser múltiplo de x. Então, $x = 2^3 \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, de modo que $a \in \{2, 3\}, b \in \{1, 2\}$ e $c \in \{0, 1\}$. Essas afirmações se baseiam no fato de que estes expoentes devem ser tais que $mdc(x, y)$ divida x, mas ainda abre possibilidades para ser $mmc(x, y)$ seja x vezes algum número (no sentido de que $mmc(x, y)$ apareça na decomposição de x). Portanto, como temos 2 possibilidades para cada um dos expoentes de $3, 5$ e 7, então temos $2^3 = 8$ possíveis valores para x e são eles os seguintes:

$$\begin{gathered}
x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \\
x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\
x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \\
x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\
x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\
x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \\
x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7
\end{gathered}$$

Portanto, alternativa (b).

6. (COMPERVE - UFRN - 2025) Como exemplo para o método de inspeção de equações do segundo grau que utiliza da soma e do produto das raízes, o professor solicitou para um aluno calcular a expressão de y em função de x da forma $y = ax^2 + bx + c$ com dois zeros x_1 e x_2 , tais que $x_1 + x_2 = -2$ e $x_1 \cdot x_2 = -3$. Supondo que o aluno obteve a expressão corretamente, sua resposta foi equivalente à expressão
   (a) $y = x^2 + 2x - 3$.
   (b) $y = x^2 + 2x + 3$.
   (c) $y = -2x - 2x^2 + 3$.
   (d) $y = 2x^2 - 2x - 3$.

Resolução: A Essa questão é boa para trabalharmos os conceitos que envolvem a técnica de soma e produto. Se você já estudou ou viu as aulas do nosso cronograma, viu como encontrar as fórmulas que usaremos aqui. Tais fórmulas são $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Então, pelo enunciado, temos que $-\dfrac{b}{a} = -2$ e $\dfrac{c}{a} = -3$. Note que:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = -2 \\ \\ \dfrac{c}{a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = -3a. \end{cases} \tag{1}$$

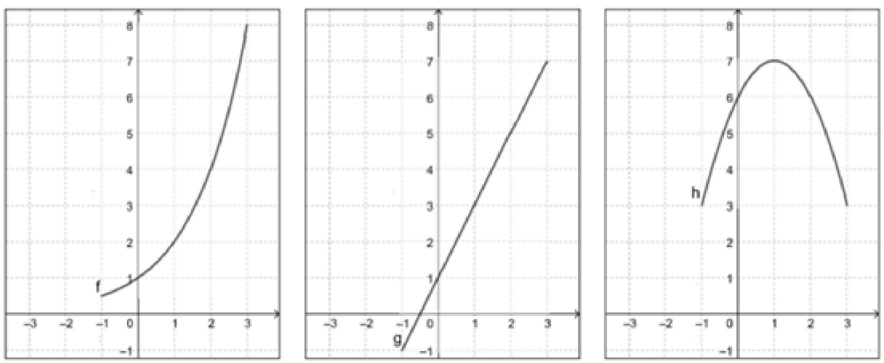
Vamos, agora, substituir essas informações na expressão da função:

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + (2a)x + (-3a) = a(x^2 + 2x - 3).$$

Como se trata de uma equação de segundo grau, $a \neq 0$ e sabemos que x_1 e x_2 resolvem $a(x^2+2x-3) = 0$, segue que a expressão equivalente dessa função é $x^2 + 2x - 3$. Isso ocorre porque o fato de a não ser zero, nos dá que $a(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$. Logo, alternativa correta letra (a).

Observação: Perceba que das alternativas, a letra (a) é a única em que a soma e o produto das raízes dão as mesmas quantidades do enunciado.

7. (UNESPAR 2025) Abaixo estão representados os gráficos de três funções no intervalo $T = [-1, 3]$. Essas funções são, respectivamente, classificadas como função exponencial (f), função afim (g) e função quadrática (h).



Considere as seguintes afirmações sobre as funções f, g e h.

(I) Existe $x \in T$ tal que $g(x) \leq f(x)$.
(II) $h(x)$ é uma função par no intervalo T.
(III) Se $x < 0$, então $h(x) > g(x) > f(x)$.
(IV) $h(2) > g(2)$ ou $f(2) > g(2)$.

É correto afirmar que:

(a) As afirmações I, II, III e IV estão corretas.
(b) Nenhuma das afirmações esta correta.
(c) Somente as afirmações III e IV estão corretas.
(d) Somente as afirmações II e III estão corretas.
(e) Somente as afirmações I e IV estão corretas.

Resolução: Vamos analisar cada uma das afirmações.

(I) Note que $f(0) = 1$ e também que $g(0) = 1$. Logo, este item é verdadeiro.

(II) Lembremo-nos que h é uma função par se para todo x no domínio de h, tivermos que $h(x) = h(-x)$. Isso implicaria que o gráfico da função h seria simétrico com relação ao eixo y, ou seja, o eixo y funcionaria como um espelho, mas não é o que acontece, pois o eixo de simetria está na reta vertical que corta o eixo x no ponto 1. Logo, essa alternativa é falsa.

(III) De fato a função h vai ser maior do que f e g quando o x for negativo, mas perceba que no ponto -1, temos $f(-1) > g(-1)$. Então, tal item é falso.

(IV) Como temos um "ou", basta que uma das duas afirmações ocorram. Note que pelos gráficos, temos que $h(2) = 6 > 5 = g(2)$. Portanto, tal afirmação é verdadeira.

Logo, a alternativa correta para a questão é a letra (e).

8. (EEAR 2023) São dadas as funções definidas por: $f(x) = x - 3$ e $g(x) = 2x^2 - 1$.
Se $x = 2$, então $f(x+1) + g(f(x))$ é igual a:
   (a) -2
   (b) 0
   (c) 1
   (d) 2

Resolução: Note que temos que calcular $f(2+1) + g(f(2))$, isto é, $f(3) + g(f(2))$. Vamos fazer por partes. Assim:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 - 3 = -1 \\ g(f(2)) &= g(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ f(3) &= 3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$f(x+1) + g(f(x)) \overset{x=2}{=} f(3) + g(f(2)) = 0 + 1 = 1.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

9. (VUNESP 2023) O gráfico de uma função quadrática f contém os pontos $(0, 7)$ e $(4, 23)$. Sabendo que $f(10) = 167$, o menor valor assumido por essa função é
   (a) 5.
   (b) 6.
   (c) 7.
   (d) 8.
   (e) 9.

Resolução: Como a questão nos pede o menor valor, nós podemos intuir que a concavidade é para cima, já que a função tem um valor de mínimo dado no ponto do vértice que chamaremos (x_v, y_v). Por se tratar de uma função de segundo grau, sabemos que é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Lembremo-nos também que os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$. Portanto, quando a questão nos diz que a o gráfico de f contém os pontos $(0, 7)$ e $(4, 23)$, então as informações que temos são: $f(0) = 7$ e $f(4) = 23$. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{cases} f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Rightarrow c = f(0) = 7 \\ f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \overset{c=7}{\Longrightarrow} 4^2a + 4b + 7 = f(4) = 23 \Rightarrow 4^2a + 4b = 23 - 7 = 16 \\ f(10) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \overset{c=7}{\Longrightarrow} 10^2a + 10b + 7 = f(10) = 167 \Rightarrow 10^2a + 10b = 167 - 7 = 160. \end{cases}$$

Juntando as informações que temos, obtemos que:

$$\begin{cases} 10^2a + 10b = 160 \\ 4^2a + 4b = 16 \end{cases}$$

Dividindo os dois lados da primeira igualdade por 10 e da segunda por 4, segue que:

$$\begin{cases} 10a + b = 16 \\ 4a + b = 4 \end{cases}$$

Agora, vamos usar essas informações para encontrar a. Note que

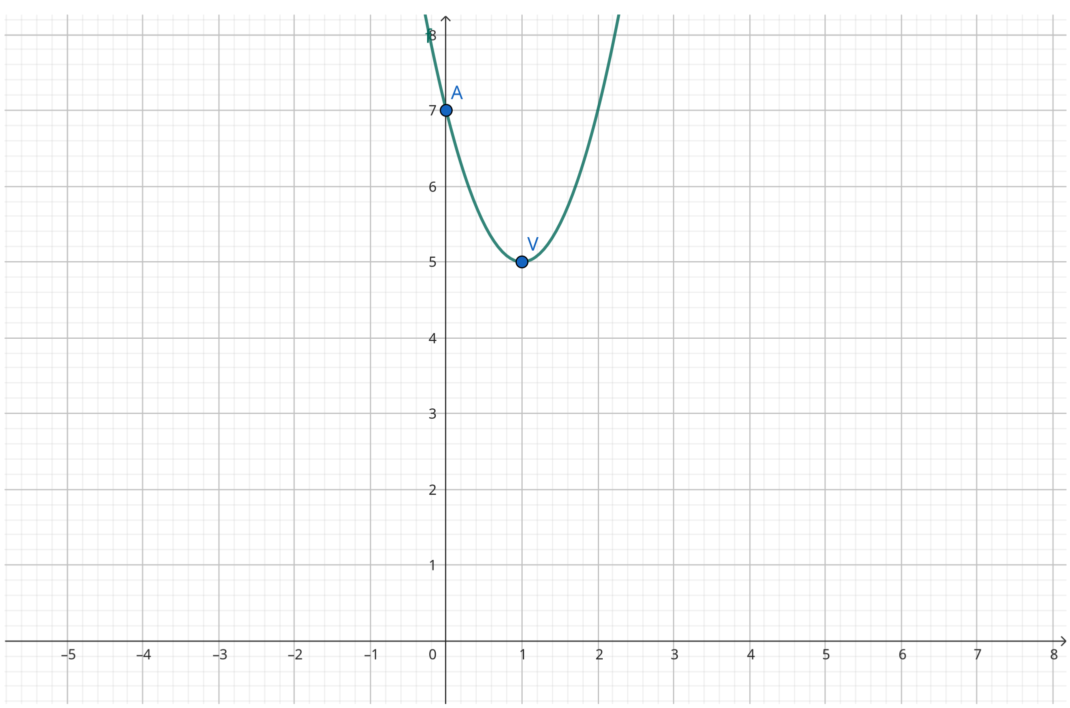
$$16 = 10a + b = 6a + \overbrace{4a + b}^{4} = 6a + 4 \Rightarrow 6a = 16 - 4 = 12 \overset{\div 6}{\Rightarrow} a = 2.$$

Assim, como $4a + b = 4$ e $a = 2$, temos que $b = 4 - 4 \cdot 2 = -4$. Deste modo, concluímos que $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$. Agora, basta calcular o o menor valor assumido por esta função, isto é, o y_v (y do vértice). Sabemos que

$$y_v = f(x_v) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7)}{4 \cdot 2} = \frac{-(16 - 8 \cdot 7)}{8} = \frac{-16 + 8 \cdot 7}{8} = -2 + 7 = 5.$$

Daí, concluímos que a resposta correta é a letra (a).

Já chegamos na resposta, mas vale a pena enxergar parte do gráfico dessa função. Se tentarmos encontrar as raízes dessa equação, pereberemos que não há raízes reais, mas já que nós sabendo que $y_v = f(x_v) = 5$, conseguimos encontrar x_v que será igual a 1 (exercício). Destarte, chamando o ponto $(0, 7)$ de A e o ponto do vértice, que é o ponto $(1, 5)$, de V, temos que nosso gráfico seria algo mais ou menos assim:



10. (INSTITUTO AOCP 2022) Calculando as intersecções entre os gráficos de $g(x) = x^2 - 11x + 35$ e $h(x) = x + 3$,
   (a) encontraremos apenas o ponto $(4, 7)$.
   (b) encontraremos apenas o ponto $(8, 11)$.
   (c) encontraremos apenas o ponto $(4, 8)$.
   (d) encontraremos mais de uma intersecção.
   (e) concluiremos que não há intersecção.

Resolução: Para qualcular as interssecções, basta que saibamos quando as funções atinge os mesmos valores na imagens, ou seja, precisamos saber quando $g(x) = h(x)$. Logo, temos que

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 - 11x + 35 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0.$$

Logo, precisamos encontrar as raízes dessa nova função $f(x) = x^2 - 12x + 32$. Pode-se usar o método que preferir, mas eu vou fazer aqui algo sem usar o procedimento tradicional. Observe que:

$$x^2 - 12x + 32 = x^2 - 8x - 4x + 32 = x(x-8) + (-4)(x-8) = (x-8)(x-4).$$

Essa ideia surgiu porque eu sabia que o produto das raízes deveria ser 32 e este número pode ser escrito como $4 \cdot 8$, então me pareceu natural tentar abrir escrever $-12x$ como $-8x - 4x$ para conseguir colocar os termos certos em evidência e conseguir fatorar essa função de segundo grau. Claro que dava para a partir daí usar soma e produto, mas eu quis passar essa ótica para vocês :-)

Assim, concluímos que as raízes são duas: 4 e 8. Como temos estas duas raízes de f, isso significa que $h(4) = g(4)$ e $h(8) = g(8)$. Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

11. (ENEM DIGITAL 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

   A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é
   (a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$
   (b) $T(x) = -\dfrac{11}{16}x^2 + 11x + 72$
   (c) $T(x) = \dfrac{3}{5}x^2 - \dfrac{24}{5}x + \dfrac{381}{5}$
   (d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$
   (e) $T(x) = \dfrac{11}{6}x^2 - \dfrac{11}{2}x + 72$

Resolução: Vamos organizar as informações com calma:

(I) Se em janeiro (mês 1) foram gastos 72 mil reais, então $T(1) = 72$.

(II) Como trata-se de uma parbola e temos um maior gasto mensal, isto é, temos um ponto do vértice no máximo que ocorre em agosto (mês 8), ou seja, o x_v (x do vértice), é 8.

(III) Como temos ponto de máximo, então a concavidade é para baixo. Ou seja, o coeficiente que acompanha o termo x^2 é negativo.

(IV) Por fim, em dezembro (mês 12) foram gastos 105 mil reais, então $T(12) = 105$.

Assim, pelo item (II), temos que $\frac{-b}{2a} = x_v = 8 \Rightarrow \boxed{b = -16a}$. Agora, escrevendo a função como $T(x) = ax^2 + bx + c$, temos, pelo item (I), $T(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 72 \Rightarrow a + b + c = 72$. Agora, juntando o que sabemos sobre b, temos o seguinte:

$$a + (-16a) + c = 72 \Rightarrow \boxed{-15a + c = 72}\ (*).$$

Além disso, por (IV), temos que

$$T(12) = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 105 \overset{b=-16a}{\Longrightarrow} 12^2 a + (-16a) \cdot 12 + c = 105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a \underbrace{(12 - 16)}_{-4} + c = 105 \Rightarrow \boxed{-48a + c = 105}\ (**).$$

Agora, subtraindo as equações $(*)$ e $(**)$, temos que:

$$-15a + c - (-48a + c) = 72 - 105 \Rightarrow -15a + c + 48a - c = -33 \Rightarrow 33a = -33 \overset{\div 33}{\Rightarrow} \boxed{a = -1}.$$

Assim, conseguimos concluir que $b = (-16)(-1) = 16$. Já temos uma alternativa para a nossa questão, mas vamos achar quem é o c só para não deixar o nosso trabalho inacabado hehehe. Como $a = -1$ e $-48a + c = 105$, então $48 + c = 105 \Rightarrow c = 105 - 48 = 57$. Portanto, $T(x) = -x^2 + 16x + 57$ e, assim, concluímos que a resposta correta é a letra (a).

12. (EFOMM 2018) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R$ 9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de R$ 1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de
    (a) R$ 8,00
    (b) R$ 7,00
    (c) R$ 6,00
    (d) R$ 5,00
    (e) R$ 4,00

Resolução: Vamos fazer essa questão encontrando a função que descreve a função. Para isso, vamos ter que interpretar a situação. Não se preocupe se achar difícil, mas não desanime! É uma questão de prática! Bom, vamos lá! Comecemos observando que a função que teremos que analisar é justamente a função que nos dá a receita, mas a receita é justamente o preço de cada caneca vezes o número de canecas vendidas. Então, podemos dizer que $R(x) =$ preço $\times$ quantidade. Como a cada 1 real que diminuímos do preço temos mais 100 unidades vendidas, analisemos alguns casos para encontrarmos um padrão que nos dê a "cara"da função.

Como a a caneca a R$ 9,00 é comprada por 300 pessoas, a receita será: $R(9) = \underbrace{9}_{9-0} \cdot \underbrace{300}_{300+100\cdot 0}$.

Como a a caneca a R$ 8,00 é comprada por 400 pessoas, a receita será: $R(8) = \underbrace{8}_{9-1} \cdot \underbrace{400}_{300+100\cdot 1}$.

Como a a caneca a R$ 7,00 é comprada por 500 pessoas, a receita será: $R(7) = \underbrace{7}_{9-2} \cdot \underbrace{500}_{300+100\cdot 2}$.

Note que eu escrevi as expreções de modo a ficar mais claro o padrão. Então, observando estes casos, temos que a função receita será o produto de duas outras funções que nos forneçam o preço descontado e o aumento na quantidade de vendas. Assim, temos que

$$R(x) = P(x) \cdot Q(x),$$

em que $P(x) = 9 - x$ é a função que nos dá o preço a cada desconto de x reais e $Q(x) = 300 + 100x$ que é a função que nos dá a quantidade de vendas baseado na quantidade de reais descontados (já que aumenta 100 vendas a cada vez que diminuímos 1). Logo, concluímos que

$$R(x) = (9 - x)(300 + 100x) = 9 \cdot 300 + 9 \cdot 100x - 300x - 100x^2 \Rightarrow \boxed{R(x) = -100x^2 + 600x + 2700}.$$

é a função que nos dá a receita em função de cada valor em reais que tiramos. Note que o termo que acompanha x^2 é negativo, então a concavidade do gráfico da função é para baixo e, assim, admite um valor máximo. Assim, basta que encontremos o valor de x_v (x do vértice), pois ele nos dará certamente o valor da maior receita. Assim:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{2(-100)} = \frac{-600}{-200} = 3.$$

Assim, concluímos que o desconto em reais que dá a maior receita é $x = 3$. Como o comando da questão quer saber o valor da caneca, devemos calcular quando vale a função preço $P(x)$ no valor 3. Daí,

$$P(3) = 9 - 3 = 6.$$

Portanto, o preço da caneca que maximiza a receita é de R$ 6,00. Alternativa correta letra (c).

13. (ITA 2018 - 1ª FASE) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por
   (a) $b + ad = d + bc$.
   (b) $d + ba = c + db$.
   (c) $a + db = b + cd$.
   (d) $b + ac = d + ba$.
   (e) $c + da = b + cd$.

Resolução: Nosso primeiro passo deve ser determinar as inversas de f e de g. Mas antes disso, façamos uma observação.

Observação: Sabemos que uma função f é basicamente é uma relação entre os conjuntos dos domínio e o contradomínio de f. Olhando para um gráfico de uma função f no plano, o eixo y costuma retratar os valores da imagem e, por isso, faz sentido que chamemos usemos a notação y para associar ao falor de f calculada em x, um ponto do domínio. Ou seja, $y = f(x)$, para x no domínio de f. Como a função inversa de f, denotada por f^{-1}, tem justamente a ideia de inverter o que foi feito por f, então a notação sugerida fica o seguinte: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Tendo isso em mente, sabemos que precisamos trocar os papéis de x e y, ou seja, $f(y) = x \Rightarrow y = f^{-1}(x)$. Logo, basta que mudemos $f(x)$ (que é o y) e x de lugar na expressão da função e isolemos o y (ou seja, acharemos $f^{-1}(x)$. Dada tal devagação (que espero que tenha mais ajudado do que atrapalhado), voltemos para a questão.

Bom, temos que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = cx + d \end{cases} \xRightarrow{\text{trocar variáveis}} \begin{cases} x = a \cdot f^{-1}(x) + b \\ x = c \cdot g^{-1}(x) + d \end{cases} \xRightarrow{a,c \neq 0} \begin{cases} f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a} \\ g^{-1}(x) = \dfrac{x-d}{c}. \end{cases}$$

Agora, dado $x \in \mathbb{R}$, calculemos $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ e $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$. Vamos lá:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-d}{c}\right) = \frac{\left(\dfrac{x-d}{c}\right) - b}{a} =$$

$$= \frac{x-d}{ac} - \frac{b}{a} = \frac{x-d}{ac} - \frac{bc}{ac} = \frac{x-d-bc}{ac}.$$

Ademais,

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{\left(\dfrac{x-b}{a}\right) - d}{c} =$$

$$\frac{x-b}{ac} - \frac{d}{c} = \frac{x-b}{ac} - \frac{ad}{ac} = \frac{x-b-ad}{ac}.$$

Pelo enunciado, sabemos que estas duas expressões são iguais, então:

$$\frac{x-d-bc}{ac} = \frac{x-b-ad}{ac} \xRightarrow{\times ac} x - d - bc = x - b - ad \xRightarrow{-x} -d - bc = -b - ad.$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por -1, temos que $b + ad = d + bc$, o que nos dá como resposta a alternativa (a).

14. (IME 2018/2019 - 1ª FASE) Definimos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), n \geq 1 \\ f(2n+1) = n^2, n \geq 1. \end{cases}$$

Definimos a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma: $g(n) = f(n)f(n+1)$. Podemos afirmar que:

(a) g é uma função sobrejetora.

(b) g é uma função injetora.

(c) f é uma função sobrejetora.

(d) f é uma função injetora.

(e) $g(2018)$ tem mais do que 4 divisores positivos.

Resolução: Para essa questão, vamos analisar cada uma das alternativas para ver se elas fazem sentido. Bom, vamos começar pelas (c) e (d), já que elas tratam da função f e sabendo como f se comporta, nós conheceremos o comportamento de g e, então, poderemos analisar as alternativas (a) e (b).

Alternativa (c): Observe que, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $n = 2^t \cdot k$, em que $t, k \in \mathbb{N}$, em que 2 não divide k, ou seja, estamos escrevendo n separando todos os fatores 2 (que eventualmente pode não ter nenhum se $t = 0$) dos outros fatores ímpares. Agora, usando a definição de f, note que:

$$f(n) = f(2^t \cdot k) = f(2 \cdot 2^{t-1} \cdot k) = f(2^{t-1} \cdot k) = f(2 \cdot 2^{t-2} \cdot k) = f(2^{t-2} \cdot k) = \cdots = f(2 \cdot k) = f(k).$$

Logo, calcular f em um natural qualquer é o mesmo que considerar só os fatores ímpares desse natural. Assim, basta analisar o que ocorre quando calculamos f em um número ímpar. Assim, como k é ímpar (pois é o produto dos ímpares na fatoração do natual n que escolhemos), então escrevamos $k = 2 \cdot m + 1$, onde $m \in \mathbb{N}$. Assim, temos que:

$$f(k) = f(2m + 1) = m^2.$$

Portanto, f leva qualquer número natural em um quadrado perfeito. Ora, como o domínio de f é o conjunto dos naturais e há naturais que não são quadrados perfeitos, então concluímos que f não é sobrejetora. Deste modo, a letra (c) é falsa.

Alternativa (d): A própria definição de f já nos entrega que ela não é injetora. Para uma função ser injetora, cada elemento da imagem pode ter apenas um correspondente no domínio. Isto é, se x_1 e x_2 são elementos do domínio, temos que ter $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou (equivalentemente), $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Mas para todo $n \geq 1$, temos $f(2n) = f(n)$, porém $2n \neq n$. Assim, a letra (d) é falsa.

Alternativa (a): Pela letra (c), dado $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ é quadrado perfeito. Portanto, $g(n)$ será um produto de quadrados perfeitos que é também um quadrado perfeito (por que? :-)). Logo, pela mesma razão dada em (c), a letra (a) é falsa.

Alternativa (b): Note que $g(2) = f(2)f(3) = f(2 \cdot 1)f(2 \cdot 1 + 1) = f(1) \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$. Mas, também temos que $g(3) = f(3)f(4) = f(2 \cdot 1 + 1)f(2 \cdot 2) = 1^2 \cdot f(2) = f(2 \cdot 1) = f(1) = 1$. Assim, $g(2) = 1 = g(3)$, logo, g não é injetora. Portanto, a alternativa (b) é falsa.

Por fim, analisemos a **alternativa (e)**. Note que

$$g(2018) = f(2018)f(2018+1) = f(2018) + f(2019) = f(2 \cdot 1009)f(2 \cdot 1009 + 1) = f(1009) \cdot (1009)^2 =$$

$$= f(1008+1)(1009)^2 = f(2 \cdot 504+1)(1009)^2 = (504)^2(1009)^2 = (2 \cdot 252)^2(1009)^2 = (2^2 \cdot 126)^2(1009)^2 =$$

$$= (2^3 \cdot 63)^2(1009)^2 = (2^3 \cdot 7 \cdot 9)^2(1009)^2 = 2^6 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 1009^2.$$

Note que não precisamos fazer as contas. Basta que observemos a quantidade de divisores que dividem esse número. Mas, novamente, não precisamos contar todos. Observe que nós dividimos $g(2018)$ em fatores (não necessáriamente primos) e um deles é o 2^6. Só daí, já temos que $2, 2^2, 2^3, 2^4$ e 2^5 dividem esse número. Logo, a quantidade de divisores positivos certamente é maior do que 4. Portanto, a alternativa correta é a letra (e).

Observação: Poderíamos ter escrito esse número em fatores primos e observados todos os possiveis dividores multiplicando o expoente de cada um deles somado 1, mas não precisa. Basta entender que essa fatoração já dá para nos fazer enxergar que há bem mais divisores do que apenas 4. Mas, querendo fazer desse jeito, iríamos ter que $g(2018) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^1 \cdot 1009^2$ e as possibilidades de dividores desses números seriam números que fossem da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 1009^d$, com a, b, c e d sendo inteiros não negativos de modo que $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, c \in \{0, 1\}$ e $d \in \{0, 1, 2\}$. Daí, vem aquela fórmula da quantidade de divisores. Deste modo, teríamos $(6 + 1)(4 + 1)(1 + 1)(2 + 1)$ que certamente é maior do que 4. Enfim, não precisava fazer essa conta toda, mas não custa discutir isso, né? :-)

15. (Opicional - Critério de Divisibilidade por 3) Tente justificar o critério de divisibilidade por 3 para um número composto por 3 algarismos, ou seja, dado abc, em que a é o algarismo da centena, b o da dezena e c o das unidades, abc é divisível por 3 se, e somente se, $a + b + c$ também for divisível por 3.

Resolução: Essa solução não visa provar matemáticamente com todos os detalher, mas dar uma ideia do motivo que torna isso verdade, embora a prova venha justamente dessa ideia que iremos abordar.
Escreva $abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. Assim, escrevendo 10 como $9 + 1$ e usando o produto notável do quadrado da soma, temos que:

$$abc = a \cdot (9+1)^2 + b \cdot (9+1) + c = a \cdot (9^2 + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 1^2) + b \cdot (9+1) + c =$$

$$= 9^2 \cdot a + 2a \cdot 9 + a + 9b + b + c = 9^2 a + 9(2a+b) + a + b + c.$$

Aqui, lembremo-nos o que é ser divisível por 3. Dizemos que um número é divisível por 3 se ele pode ser escrito como 3 vezes algum outro número inteiro. Um exemplo disso é 6, isto é, 6 é divisível por 3, pois $6 = 3 \cdot 2$ e 2 é um inteiro. Assim, nós sabemos que 9 é divisível por 3, já que $9 = 3 \cdot 3$. Reescrevendo abc colocando 9 em evidência, observe que:

$$abc = 9^2 a + 9(2a+b) + a + b + c = 9(9a + 2a + b) + a + b + c \overset{9=3\cdot 3}{=} 3 \cdot \underbrace{3(9a + 2a + b)}_{\in \mathbb{N}} + a + b + c.$$

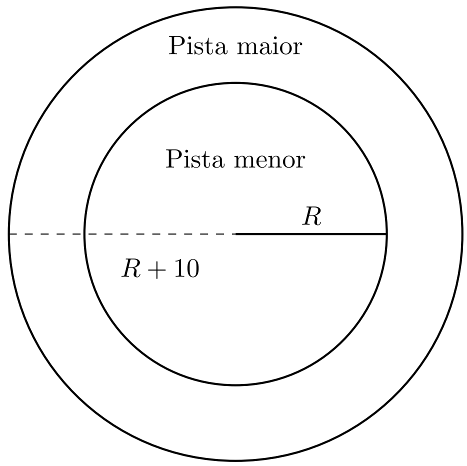
Logo, se abc é divisível por 3, então $3 \cdot 3(9a+2a+b)+a+b+c$ também precisa ser (já que isso é a mesma coisa que abc). Note que $3 \cdot 3(9a+2a+b)$ já é divisível por 3, então falta só $a+b+c$ também ser para que isso seja verdade. De modo recíproco, se $a+b+c$ for um divisível por 3, somar com outro número divisível por 3 continua sendo divisível por 3 (por que? :-)), daí abc vai ser divisível por 3, já que abc é justamente a soma de $a+b+c$ com um número divisível por 3 ($abc = 3 \cdot 3(9a+2a+b)+a+b+c$).

Observação: Esse argumento serve para mostrar isso para um número com qualquer quantidade de algarismos. Uma coisa que você pode refletir é como mostrar isso hehehe. Bom, por falta de espaço e para não importunar vocês, vou só afirmar que se temos um número inteiro qualquer $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$, então esse número é divisível por 3 se, e somente se, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ também for. Se você não entendeu nada do que foi falado nessa observação, não se preocupe, pois é uma informação extra. Mas, querendo refletir sobre isso, volte na aula de critério de divisibilidade de um número por 3 e tente agora enxergar essa situação com a visão após ter tentado resolver esse exercício (ou pelo menos, visto a resolução dele hehehe).

Frente 3: Geometria Plana

16. (SELECON 2025) Duas pistas de ciclismo circulares são concêntricas, e o diâmetro de uma é 20 metros maior que o da outra. Sabe-se que o comprimento da pista maior é 40% maior que o comprimento da pista menor. Se o raio da pista menor, em metros, é igual a R, a soma dos algarismos de R é:
   (a) 6
   (b) 7
   (c) 8
   (d) 9

Resolução: Comecemos por entender geometricamente essa questão. Temos duas circunferências que se organizam da seguinte forma:



Note que a linha pontilhada representa o raio da pista maior e a linha preenchida é o raio da pista menor. Perceba que eu coloquei que o raio da maior é $R+10$. Por que eu fiz isso? Bom, o enunciado nos diz que o diâmetro da maior é 20 metro maior que a outra, ou seja, chamando D_m o diâmetro da pista menor e D_M o diâmetro da pista maior, temos que

$$D_M = D_m + 20$$

Mas, lembrando que o raio de uma circunferência é metade do diâmetro, chamando o raio da maior de R_M e como o enunciado nos disse que o raio da menor é R, temos que:

$$R_M = \frac{D_M}{2} = \frac{D_m + 20}{2} = \frac{D_m}{2} + \frac{20}{2} = R + 10.$$

Agora, vamos para a informação do comprimento! Chamando o comprimento da circunferência menor de C_m e o da maior de C_M, segue que:

$$\begin{cases} C_M = 2\pi R_M \\ C_m = 2\pi R \end{cases}$$

Já que o enunciado nos diz que o comprimento da maior é 40% da maior e sabendo que 40% $= \dfrac{40}{100} = \dfrac{4}{10}$, devemos ter que $C_M = C_m + \dfrac{4}{10} \cdot C_m = \left(1 + \dfrac{4}{10}\right) C_m = \left(\dfrac{10}{10} + \dfrac{4}{10}\right) C_m = \dfrac{14}{10} \cdot C_m$.

Como queremos achar uma informação relacionada ao raio da circunferência menor, usando a fórmula do comprimento da circunferência para cada uma dessas, temos que

$$2\pi(R + 10) = 2\pi R_M = C_M = \frac{14}{10} \cdot C_m = \frac{14}{10} \cdot 2\pi R.$$

Assim, segue que

$$2\pi(R + 10) = \frac{14}{10} \cdot 2\pi R \overset{2\pi}{\Rightarrow} R + 10 = \frac{14}{10} R \overset{-R}{\Rightarrow} \frac{14}{10} R - R = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14}{10} R - \frac{10}{10} R = 10 \Rightarrow \left(\frac{14 - 10}{10}\right) R = 10 \Rightarrow \frac{4}{10} R = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{100}{4} = 25.$$

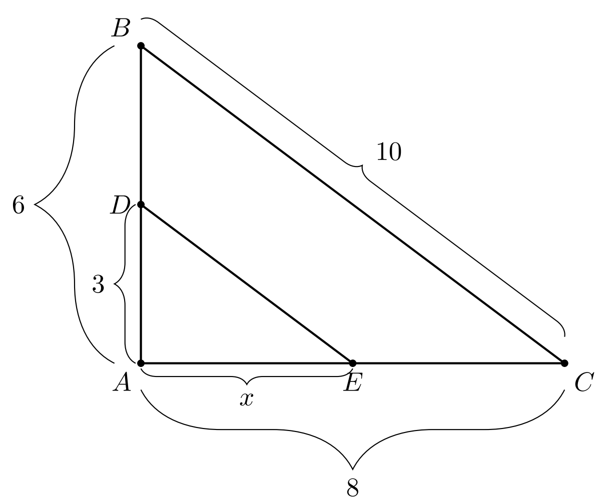
Logo, como $R = 25$, basta que somemos seus algarismos, ou seja, a resposta para essa questão é $2 + 5 = 7$. Alternativa correta letra (b).

Observação: Tanto nessa questão, como em outras, eu estou "ocutando"as unidades de medidas, pois não está sendo necessário explicitá-las. Nessa questão, as medidas são todas em metros, inclusive. Em alguns casos, teremos que considerar isso. Enfim, só uma observação mesmo hehehe. Vamos para a próxima!

17. (IDECAN 2024) Considere um triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm e $\overline{BC} = 10$ cm. Uma reta r paralela ao lado BC intersecta AB no ponto D e AC no ponto E, de tal forma que $\overline{AD} = 3$ cm. Desse modo, determine a relação entre as áreas dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$.

   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{1}{6}$
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) $\frac{1}{4}$

Resolução: Vamos tentar ilustrar a situação para sabermos o que fazer.



Agora, basta assumir a base do triângulo $\triangle ABC$ sendo $\overline{AB}$. Então, a razão de semelhança é $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Portanto, a razão entre às àreas será o quadrado dessa razão de semelhança e, portanto, chamando as áreas do triângulo $\triangle ADE$ e a do triângulo $\triangle ABC$ de A_{ADE} e A_{ABC}, respectivamente, temos que

$$\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Logo, a alternativa correta é a letra (d).

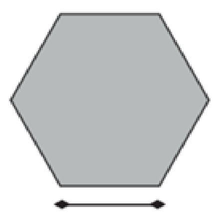
Outro jeito: Se você não lembrasse da relação métrica entre áreas, daria para deduzir nessa questão. Mais para frente no cronograma veremos semelhanças de triângulos e triângulos pitagóricos, e este é justamente o caso. Esses triângulos do desenho são retângulos (satisfazem o Teorema de Pitágoras). Como o segmento $\overline{DE}$ é gerado pela reta r, então tal segmento é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Assim, podemos afirmar proporcionalidade entre as medidas dos triângulos, considerando $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ as alturas de $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$, respectivamente. Logo, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 3}{6} = \frac{4 \cdot\ 2 \cdot 3}{6} = 4.$$

Portanto, $\overline{AE} = 4$. Deste modo, seguiria que:

$$\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{2}}{\frac{8 \cdot 6}{2}} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

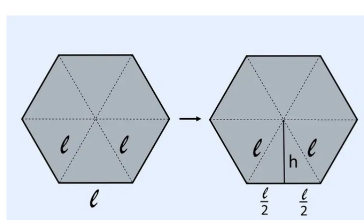
18. (SELECON 2025) A superfície de uma praça tem a forma de um hexágono regular com 30 metros de lado, conforme mostra a figura a seguir.



Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, a área dessa superfície, em m^2, corresponde a:

(a) 2.260
(b) 2.270
(c) 2.285
(d) 2.295

Resolução: Para fazer essa pergunta, você pode usar a fórmula da área de um hexágono, mas seguiremos por outro caminho fazendo de conta (ou não hehe) de que não sabemos a fórmula. Bom, primeiramente, lembre que um haxágono regular é composto por 6 triângulos equiláteros. Aqui, usaremos o famoso Teorema de Pitágoras, mesmo sem termos tratado dele especificamente no cronograma deste mês, porém é bom já ir se acostumando para quando ver mês que vem já estar familiarizado :-). Primeiramente, observe a imagem:



Já temos pelo enunciado que $l = 30$ m. Percisamos saber quem é h. Então, usando Pitágoras, segue que:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 15^2 \overset{\text{produto notável}}{\Leftrightarrow} h^2 = (30+15)(30-15) = 45 \cdot 15 = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \Rightarrow h = 3 \cdot 5\sqrt{3} = 15 \cdot 1,7 = 15 \cdot \frac{17}{10}.$$

Eu escrevi $1,7$ de um jeito diferente porque não quero gastar tempo com conta e não gosto de trabalhar com vírgula hehehe. Em nome da preguiça, vamos carregar o valor de h sem fazer as contas ainda (isso nos ajudará a cancelar uns termos). Agora que sabemos quem é h, vamos calcular a área de um dos triângulos equiláteros. Note que essa área será:

$$A_{\triangle} = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{30 \cdot \left(\frac{15 \cdot 17}{10}\right)}{2} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 17}{2} = \frac{45 \cdot 17}{2} = \frac{765}{2}.$$

Como temos 6 triângulos desses, a área da superfície hexagonal será:

$$A_{\hexagon} = 6 \cdot \frac{765}{2} = 3 \cdot 765 = 3(700 + 60 + 5) = 2100 + 180 + 15 = 2295.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

19. (UTFPR 2015/1) Os ângulos externos de um polígono regular medem $15°$. O número de diagonais desse polígono é:
    (a) 56.
    (b) 24.
    (c) 252.
    (d) 128.
    (e) 168.

Resolução: Lembremo-nos que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é $360°$. Então, se n é a quantidade de lados do polígono, segue que

$$n \cdot 15° = 360° \Rightarrow n = \frac{360°}{15°} = \frac{10 \cdot 36°}{15°} \overset{\div 5}{=} \frac{2 \cdot 36°}{3°} = 2 \cdot 12 = 24.$$

Agora, basta usar a fórmula do número de diagnonais.

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{24(24-3)}{2} = \frac{24 \cdot 21}{2} = 12 \cdot 21 = (10+2)(20+1) = 200 + 10 + 40 + 2 = 252.$$

Portanto, a resposta correta é a letra (c).

Frente 5: Progressões Aritmética e Geométrica

20. (CEBRASPE 2024) Em determinado dia, uma central telefônica da segurança pública para chamadas de emergência registrou, entre 6 e 7 horas da manhã, um total de 12 ligações. Nesse dia, entre as 6 e as 19 horas, a quantidade de ligações por hora aumentou em progressão aritmética com razão igual a 4. Nessa situação, a quantidade de ligações registrada entre 18 e 19 horas foi igual a

    (a) 52.

    (b) 56.

    (c) 60.

    (d) 64.

    (e) 72.

Resolução: Note que se entre 6 e 7 horas foram registradas 12 ligações, esta foi a primeira hora analisada do dia. Como a quantidade de ligações aumenta em 4 ligações a cada hora, entre 7 e 8 horas, foram registradas 16 ligações e assim por diante. Note que os registros são feitos das 6 horas até às 19 horas, isto é, temos uma sequência de ligações feitas por hora com tamanho $19 - 6 = 13$. O primeiro termo dessa sequência será 12. Assim, como o que o enunciado pede é a quantidade de ligações entre 18 horas e 19 horas, o termo dessa sequência que estamos procurando é justamente o último, isto é, o décimo terceiro termo. Chamando-o de a_{13}, temos que:

$$a_{13} = a_1 + (n-1)r = 12 + (13-1)4 = 12 + 12 \cdot 4 = 12 \cdot 5 = 60.$$

Portanto, a resposta é a letra (c).

21. (PM-MG 2023) Considere a seguinte sequência: $1, 5, 13, \ldots$ Nessa sequência, cada termo é o dobro do seu anterior mais três. Marque a alternativa CORRETA que se refere ao nono termo dessa sequência.

    (a) 509.

    (b) 1021.

    (c) 2045.

    (d) 4093.

Resolução: Bom, aqui temos um tipo de progressão um pouco esquisita, pois não é só somar ou multiplicar, mas vamos entender com calma como trabalhar com ela. Vamos observar alguns termos dessa sequência:

$$\begin{gathered} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13 \\ a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29 \\ a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61 \end{gathered}$$

Poderíamos continuar fazendo estas contas até achar o a_9 e marcar a resposta certa, mas vamos seguir um caminho mais elegante hehe. Observe que

$$\begin{gathered} a_2 = 5 = 1 + 4 = a_1 + 4 \\ a_3 = 13 = 5 + 8 = a_2 + 8 \\ a_4 = 29 = 13 + 16 = a_3 + 16 \\ a_5 = 61 = 29 + 32 = a_4 + 32 \end{gathered}$$

Note que no fundo (e aqui eu recomendo você "brincar"com a lei de formação da sequência para entender o porquê) o que está acontecendo é que cada termo é o anterior somado com algum valor e esse valor vai aumentando dobrando o acréscimo feito no termo anterior. Por exemplo, $a_5 = a_4 + 32 = a_4 + 2 \cdot 16$ e 16 é o termo que somamos no a_4, pois $a_4 = a_3 + 16$. Assim, consideremos a sequência desses valores que chamaremos de acréscimos $(4, 8, 16, 32, \dots)$. Para diferências os termos desta nova sequência, chamaremos eles de $b_i's$. Então, o primeiro termo é $b_1 = 4$, o segundo é $b_2 = 2 \cdot b_1 = 2 \cdot 4 = 8$ e assim por diante. Logo, como b_1 é o acréscimo que fazemos para sair de a_1 e chegar em a_2, b_8 vai ser o acréscimo que faremos para sair de a_8 para a_9. Como essa nova progressão se trata de uma PG de razão $q = 2$, temos que

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} = 4 \cdot 2^7 = 2^2 \cdot 2^7 = 2^9 = 512.$$

Agora, para encontrar o a_9, note o seguinte:

$$\begin{gathered} a_2 = 5 = 1 + 4 = a_1 + b_1 \\ a_3 = 13 = 5 + 8 = a_2 + b_2 = (a_1 + b_1) + b_2 = a_1 + (b_1 + b_2) \\ a_4 = 29 = 13 + 16 = a_3 + b_3 = a_1 + (b_1 + b_2) + b_3 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3). \end{gathered}$$

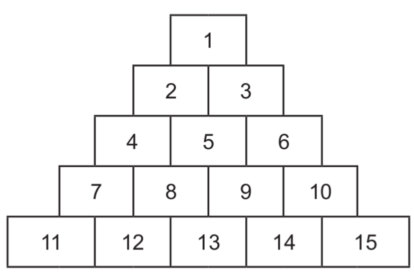
Ou seja, $a_9 = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_7 + b_8)$. Portanto, precisamos calcular a soma dos termos da PG finita $\{4, 8, 16, 32, \dots, 512\}$. Daí, usando a fórmula da soma de termos de uma PG finita,

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 4 = 1024 - 4 = 1020.$$

Então, concluímos que $a_8 = a_1 + S_8 = 1 + 1020 = 1021$. Letra (b).

22. (UFMG 2013) Dentro dos bloquinhos que formam uma pirâmide foram escritos os números naturais, conforme ilustrado na figura abaixo, de forma que:

- na primeira linha da pirâmide aparece um número: 1;
- na segunda linha da pirâmide aparecem dois números: 2 e 3;
- na terceira linha da pirâmide aparecem três números: 4, 5 e 6;
- na quarta linha da pirâmide aparecem quatro números: 7, 8, 9 e 10, e assim sucessivamente.



Considerando essas informações,

(a) Determine quantos bloquinhos são necessários para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide.
(b) Determine o último número escrito na trigésima linha da pirâmide.
(c) Determine a soma de todos os números escritos na trigésima linha da pirâmide.

Resolução:

(a) Perceba que a quantidade de blocos em cada linha corresponde ao número da linha, isso por construção do enunciado. Logo, temos que a quantidade de blocos necessários será uma PA de razão 1. Consideremos a soma até o décimo termo dessa PA:

$$S_{10} = \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = \frac{11\cdot 10}{2} = 11\cdot 5 = 55.$$

Portanto, precisaremos de 55 bloquinhos para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide.

(b) Agora, teremos que analisa uma outra PA. Perceba que o último número de cada linha é justamente uma PA de razão 1 que começa do 1 e vai até o número da linha em que se está. Por exemplo,

$$\begin{gathered}
\text{Último da linha } 2 \Rightarrow 1+2=3\\
\text{Último da linha } 3 \Rightarrow 1+2+3=6\\
\text{Último da linha } 4 \Rightarrow 1+2+3+4=10\\
\text{Último da linha } 5 \Rightarrow 1+2+3+4+5=15\\
\text{Último da linha } 6 \Rightarrow 1+2+3+4+5+6=21\\
\text{Último da linha } 7 \Rightarrow 1+2+3+4+5+6+7=28\\
\vdots
\end{gathered}$$

Note que antes estávamos querendo saber a quantidade de blocos e agora estamos investigando o último número que aparece em cada linha e esse número será dado por uma PA. Isso se deve ao fato de que o último número de um bloco ser o número do último bloco anterior somado com a quantidade de blocos da linha seguinte, isto é, se chamarmos n_k o último número da linha k, então $n_{k+1} = n_k + (k+1)$ será o último número da linha k+1.
Portando, basta calcular a soma dessa PA até o número 30 (trigésima linha):

$$S_{30} = \frac{(1+30)\cdot 30}{2} = 31\cdot\frac{30}{2} = 31\cdot 15 = 465.$$

Logo, o último número da trigésima linha é 465.

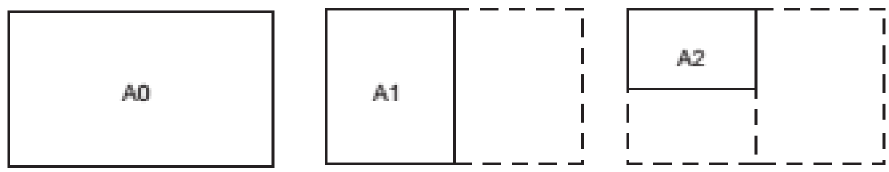
(c) Por fim, calculemos a soma de todos os números da trigésima linha. Note que os números da linha trinta vão formar uma PA de razão 1 também, mas agora o primeiro termo dessa PA não é mais o 1. Precisamos encontrá-lo! Para isso, sabendo que o último termo é 465 (pela questão anterior) e o primeiro número dessa linha está a uma distância de 29 blocos do último, basta fazer essa subtrliação: $465 - 29 = 436$. Assim, sabemos que o primeiro termo da PA é 436 e o último é 465. Daí, segue que:

$$S_{30} = \frac{(436+465)\cdot 30}{2} = 901\cdot\frac{30}{2} = 901\cdot 15 = 13515.$$

Portanto, o a soma de todos os números da trigésima linha é 13515.

Observação: Perceba que as PA's que trabalhamos nessa questão são diferentes, embora parecidas. Nas letras (a) e (b), trabalhamos praticamente com a mesma PA, mas a primeira era para contar os blocos e a segunda para descobrir o número que devia estár no último bloco da linha 30. Na letra (c), temos uma PA com a mesma razão das outras (razão 1), mas que o primeiro termo não é mais o número 1 e sim o primeiro número da linha 30 (que é 436).

23. (ENEM 2015) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países. O formato-base é uma folha retangular de papel chamada de A0, cujas dimensões estão na razão $1 : \sqrt{2}$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, definindo os demais formatos, conforme o número da dobradura. Por exemplo, A1 é a folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 é a folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente, conforme figura.



Um tamanho de papel bastante comum em escritórios brasileiros é o A4, cujas dimensões são 21,0 cm por 29,7 cm. Quais são as dimensões, em centímetros, da folha A0?

(a) $21,0 \times 118,8$

(b) $84,0 \times 29,7$

(c) $84,0 \times 118,8$

(d) $168,0 \times 237,6$

(e) $336,0 \times 475,2$

Resolução: Para essa questão nem precisa usar teoria de PG. Mas basicamente cada termo das dimensões das folhas iriam dobrar quando elas fossem desdobradas. Teremos que fazer justamente o caminho de partir das dimensões de A4 e ir "desdobrando"para chegar nas dimensões de A0. Perceba que a cada desdobramento, apenas uma das dimensões é dobrada. Pela imagem, A3 terá alteração na segunda dimensão e A4 na primeira na hora de dobrar. Para desdobrar, A3 alterará sua primeira dimentsão e A4 sua segunda e assim sucessivamente. Daí:

$$\begin{gathered} \text{A4: } 21 \times 29,7 \\ \text{A3: } 42 \times 29,7 \\ \text{A2: } 42 \times 59,4 \\ \text{A1: } 84 \times 59,4 \\ \text{A0: } 84 \times 118,8 \end{gathered}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

24. (ITA 1995) Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0,3; 0,03; 0,003; ...$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

(a) 1/3.

(b) 2/3.

(c) 1.

(d) 2.

(e) 1/2.

Resolução: Não temam só porque a questão é do ITA. Vocês vão ver que não é nenhum bicho de 7 cabeças hehehe. Vamos lá! Já que vamos precisar saber o valor dos termos da PG, temos que descobrir qual é a razão dela. Assim, chamando-a de q, vamos ver qual é. Olhando para a PG $(0,3; 0,03; 0,003; \dots)$, fica claro que de um termo para outro está se dividindo por 10. Mas se quiser conferir, basta que façamos a divisão de um termo pelo seu anterior. Façamos isso com os dois primeiros.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0,03}{0,3} \overset{\times 100}{=} \frac{3}{30} \overset{\div 3}{=} \frac{1}{10}.$$

Beleza! Agora, usemos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{10-1}{10}} \overset{\times 10}{=} \frac{3}{9} \overset{\div 3}{=} \frac{1}{3}.$$

Pronto! O enunciado agora nos fala que esse valor que encontramos da soma é o termo médio de uma PA de 3 termos. Assim, chamando de r a razão dessa PA e sabendo que o termo anterior vai ter menos r de quantidade e o próximo vai ter mais r, temos que nossa PA é $\left(\frac{1}{3}-r, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}+r\right)$. Perceba que não precisamos usar fórmula para somar os termos dessa PA. Basta somar. Daí,

$$\left(\frac{1}{3}-r\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}+r\right) = \frac{1}{3} - r + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + r = \frac{3}{3} = 1.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

25. (ITA 2017) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é
    (a) -140.
    (b) -120.
    (c) 0.
    (d) 120.
    (e) 140.

Resolução: Primeiramente, vamos comentar sobre uma propriedade fundamental de PG. Tal propriedade é de que qualquer termos ao quadrado é igual ao produto dos seus termos vizinhos. Analisemos o motivo disso ocorrer. Sabemos que o termo geral é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Tendo isso em vista, escrevamos 3 termos consecutivos de uma PG qualquer:

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

Agora, tomando a_n e elevando ao quadrado, temos que:

$$a_n^2 = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = a_1^2 \cdot q^{n+n-2} = \underbrace{a_1 \cdot q^{n-2}}_{a_{n-1}} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^n}_{a_{n+1}} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Assim, está mostrado o que dissemos anteriormente. Uma propriedade análoga serve para PA. No caso, tomando três termos seguidos, temos que o termo do meio é a média aritmética dos seus vizinhos, isto é, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ (note que isso é outro jeito de escrever a média aritmética, eu só multipliquei os dois lados por 2). Esta segunda deixarei para vocês conferirem. Assim, voltemos para a nossa questão. Usando essa propriedade de PG, temos que $b^2 = a \cdot c$. Usando a propriedade da PA, temos $2 \cdot \frac{b}{2} = a + \frac{c}{4} \Rightarrow 4b = 4a + c \Rightarrow 4a = 4b - c$. Agora, multiplicando por 4, substituamos $4a$ no que obtivemos pela propriedade da PG:

$$b^2 = ac \Rightarrow 4b^2 = 4ac = (4a)c = (4b - c)c = 4bc - c^2.$$

Logo,

$$\underbrace{c^2 - 4bc + 4b^2}_{(c-2b)^2} = 0 \Rightarrow c - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{c = 2b}.$$

Daí, também temos $4a = 4b - c = 4b - 2b = 2b \Rightarrow \boxed{a = \frac{b}{2}}$. Logo, voltando para a nossa PG, temos $(a, b, c, d) = \left(\frac{b}{2}, b, 2b, d\right)$. Note que a razão da nossa PG é 2, segue que $d = 4b$. Assim, a PG fica $\left(\frac{b}{2}, b, 2b, 4b\right)$. Além disso, a nossa PA fica $\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right) = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{2b}{4}, 4b - 140\right) = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, 4b - 140\right)$. Perceba que isso é uma PA de razão zero, então temos que o último também tem que ser $\frac{b}{2}$. Assim,

$$4b - 140 = \frac{b}{2} \Rightarrow \underbrace{4b - \frac{b}{2}}_{\frac{8b-b}{2}} = 140 \Rightarrow 7b = 2 \cdot 140 \overset{\div 7}{\Rightarrow} \boxed{b = 40}.$$

Sabendo disso, obtemos que $d = 4b = 4 \cdot 40 = 160$. Portanto, $d - b = 160 - 40 = 120$. A alternativa correta é a letra (d).