



RESOLUÇÃO 5 COMENTADA

ABRIL

Matemática

*Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de **abril**.*



Resolução comentada da lista de abril - matemática

Frentes 1 e 2: Matemática Básica, Conjuntos e Funções

Para todas as listas, será usado tanto o sinal “ $\times$ ” como o sinal “ $\cdot$ ” para representar a operação de multiplicação. Quando se tratar de operações algébricas, o sinal será omitido. Dessa forma, ab simboliza a operação $a \times b$ ou $a \cdot b$ que quer dizer a vezes b .

Além disso, vou combinar com vocês que quando eu usar “ $\Rightarrow$ ” entre duas igualdade, isso significa que estou dizendo que a igualdade da esquerda implica a igualdade da direita. Se eu usar “ $\Leftrightarrow$ ”, é porque vale a implicação tanto da esquerda para a direita, como da direita para a esquerda.

1. Resolva as seguintes operações sem armar a conta de multiplicação, isto é, abrindo os termos do produto em somas convenientes e usando a distributividade.

- (a) 67×4
- (b) 14×46
- (c) 452×69
- (d) 321×847

Resolução: Para tal questão, vamos usar as dicas sugeridas. Há várias maneiras de abrir as contas, mas usaremos aqui a separação em centenas, dezenas e unidades para facilitar. Usaremos “dit” para indicar onde a distributividade está sendo aplicada. Assim, segue que:

$$(a) \quad 67 \times 4 = (60 + 7) \times 4 \stackrel{\text{dit}}{=} 60 \times 4 + 7 \times 4 = 240 + 28 = 268.$$

$$(b) \quad 14 \times 46 = (10 + 4) \times (40 + 6) \stackrel{\text{dit}}{=} 10 \times 40 + 10 \times 6 + 4 \times 40 + 4 \times 6 = 400 + 60 + 160 + 24 = 460 + 184 = 644.$$

$$(c) \quad 452 \times 69 = (400 + 50 + 2) \times (60 + 9) = 400 \times 60 + 400 \times 9 + 50 \times 60 + 50 \times 9 + 2 \times 60 + 2 \times 9 = 24000 + 3600 + 3000 + 450 + 120 + 18 = 27600 + 3450 + 138 = 31050 + 138 = 31188.$$

$$(d) \quad 321 \times 847 = (300 + 21) \times (800 + 47) \stackrel{\text{dit}}{=} 300 \cdot 800 + 300 \cdot 47 + 21 \cdot 800 + 21 \cdot 47 \stackrel{\text{dit}}{=} 300 \cdot 800 + 300 \cdot 47 + 21 \cdot 800 + (20 + 1) \cdot (40 + 7) \stackrel{\text{dit}}{=} 300 \cdot 800 + 300 \cdot 47 + 21 \cdot 800 + 20 \cdot 40 + 20 \cdot 7 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 7 = 240000 + 14100 + 16800 + 800 + 140 + 40 + 7 = 254100 + 17600 + 187 = 271700 + 187 = 271887.$$

Uma observação que gostaria de pontuar é que a solução está do jeito que está para deixar claro o processo mental usado quando se faz multiplicação de cabeça. Na letra (d), foram omitidas algumas passagens (afinal, a conta é longa hehe), mas a ilustração do processo está em detalhes. Note que às vezes, é melhor fazer todas as distributivas antes de sair fazendo conta e quando está tudo “distribuído”, aí sim é hora de operar. Assim, nós diminuimos a chance de erro. Recomendo que busquem fazer outras multiplicações fora essas de cabeça. Escolham dois números e “mãos a obra!”. No começo, erramos bastante, mas é questão de treino. Mais para frente, isso será muito útil para ganhar tempo em questões. Se quiserem, façam mais multiplicações aleatórias para treinar.

2. Júlia decidiu vender caixas com doces para arrecadar dinheiro e poder viajar nas férias. Ela comprou 12 caixas e com os ingredientes produziu: 50 brigadeiros, 30 beijinhos, 30 cajuzinhos e 40 bem casados. De acordo com a produção de Júlia, quantos doces ela deve colocar em cada caixa para serem vendidos sabendo que cada uma delas deve conter um número igual de doces?

Resolução: Primeiramente, temos que saber quantos doces Júlia produziu no total. Para isso, basta somar todos os doces. Logo, temos que o total de doces é:

$$50 + 30 + 30 + 40 = 150.$$

Assim, basta dividir em doze caixas. Montemos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 15'0 & 12 \\ - 12 & 12 \\ \hline & 30 \\ - & 24 \\ \hline & 6 \end{array}$$

Portanto, ela deve colocar 12 doces em cada caixa e ainda restarão 6 doces. Um coisa importante de observar nessa questão é que se quiséssemos continuar a operação, teríamos concluído que $\frac{150}{12} = 12,5$. Neste caso, não foi necessário concluir, porque só nos interessava a divisão inteira. Outra coisa importante de se observar é que tal conta nos diz que $150 = 12 \cdot 12 + 6$. Ter isso em mente pode ser importante.

Nesse espírito, outra maneira de se fazer essa questão poderia ser a seguinte:

$$150 = 120 + 30 = 12 \cdot 10 + 24 + 6 = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 2 + 6 = 12 \cdot (10 + 2) + 6 = 12 \cdot 12 + 6.$$

Assim, concluiríamos que conseguimos agrupar 12 caixas com 12 doces cada e restariam 6, do mesmo modo. Note que esse jeito de pensar é mais rápido e o único trabalho é pensar em como escrever 150 como soma de múltiplos de 12. Se você já souber que $12^2 = 144$, a questão sai de modo imediato. Enfim, esse tipo de estratégia usando propriedades da multiplicação nos poupa de fazer mais contas do que o necessário. Novamente, é uma questão de treino. Vamos para a próxima!

3. Das igualdades a seguir, encontre aquela que está incorreta.

- (a) $5 - 5 \times 4 = -15$
- (b) $-10 - 3 + 4 = -9$
- (c) $(-15) : (-5) + 4 = 1$
- (d) $8 + (-3) \times (-4) = 20$
- (e) $(-30) : 10 - 3 = -6$

Resolução: A alternativa correta é a letra (c), pois todas as outras respeitam a prioridade das operações. A letra (c) priorizou a soma no lugar da divisão, assim, o correto seria

$$(-15) : (-5) + 4 = 3 + 4 = 7.$$

Lembre que a prioridade é sempre a multiplicação e depois a soma. Com isso, vale ressaltar que entre a multiplicação e a divisão não há prioridade de uma sobre a outra, afinal uma divisão nada mais é que multiplicar o dividendo pelo inverso multiplicativo do divisor, ou seja, se eu escrevo $\frac{15}{3}$, podemos enxergar como $15 \cdot \frac{1}{3}$. Portanto, a divisão não tem prioridade, já que no fundo é a mesma operação. A mesma coisa acontece entre a soma e a subtração, já que $25 - 4$ é a mesma coisa que $25 + (-4)$ (subtrair é somar com um número negativo).

4. (OBMEP - Portal da Matemática) Dividindo-se o número 4^4 por 4^4 obtemos o número:

- (a) 2
- (b) 4^3
- (c) 4^4

- (d) 4^8
(e) 4^{12}

Resolução:

$$\frac{4^{4^2}}{4^4} = \frac{4^{16}}{4^4} = 4^{16-4} = 4^{12}.$$

Logo, alternativa (e).

5. (OBMEP - Banco de Questões 2020) Se $6xy - \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}y^2$, calcule $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4$.

Resolução: A questão nos dá que $6xy - \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}y^2$. Então, a ideia será manipular tal expressão algébrica em vista de achar algo semelhante ao que queremos calcular. Primeiramente, uma boa ideia é agrupar os termos que são multiplicados pela mesma coisa. No caso, vamos juntar quem tem $\sqrt{3}$. Assim, segue que

$$6xy - \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}y^2 \Leftrightarrow 6xy = \sqrt{3}y^2 + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}(x^2 + y^2).$$

Agora, separemos a parte literal de um lado da igualdade e a parte numérica do outro. Logo,

$$6xy = \sqrt{3}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Mas perceba que $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Opa! Parece que está ficando com a cara que a gente quer. Vamos reescrever o que temos até agora:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Queremos que apareça algo parecido com isso, mas com cada um dos termos da esquerda elevados a quarta potência. Vamos fazer isso aos poucos. Elevemos os dois lados ao quadrado. Para isso, usaremos o produto notável do quadrado da soma. Assim, teremos que

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{6^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{36}{3} = 12.$$

Note que o termo do meio do lado esquerdo será apenas 2, pois $2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2 \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{y}{y} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Deste modo, subtraindo 2 dos dois lados da igualdade, obtemos

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 = 12 - 2 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 10.$$

Ufa! Quase lá. Agora, elevando mais uma vez os dois lados ao quadrado, conseguiremos obter a expressão que o enunciado pede. Vamos omitir algumas passagens nas contas, pois acredito que vocês já pegaram a dinâmica. Fiz com esse detalhe para que vocês enxerguem bem que não existe isso de "passar pro outro lado mudando a operação". Lembrem bem no fundo do coração que essas passagens valem porque temos igualdades entre duas coisas, o que fazemos de um lado, precisamos fazer do outro para manter a igualdade. O ponto é que fazemos essas coisas para que a igualdade

fique com uma cara parecida com a que a gente quer. Enfim, dado o pequeno sermão, vamos nessa! Elevemos mais uma vez os dois lados ao quadrado!

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 = 10^2 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 100 - 2 = 98.$$

Finalmente, encontramos nossa resposta! 98 é o valor procurado. Bom, espero que tenham se divertido. Vamos adiante!

6. (OBMEP - Banco de Questões 2020) Para os inteiros a e b definimos $a * b = a^b + b^a$. Se $x \in \mathbb{Z}^*$ e $2 * x = 100$, a soma dos algarismos de $(4x)^4$ é igual a:
- (a) 20
 - (b) 25
 - (c) 30
 - (d) 35
 - (e) 27

Resolução: Temos que

$$2^x + x^2 = 2 * x = 100 \Leftrightarrow 100 - x^2 = 2^x \Leftrightarrow 10^2 - x^2 = 2^x \Leftrightarrow (10 + x)(10 - x) = 2^x.$$

Temos o produto de dois números, os números $10 + x$ e $10 - x$, dando uma potência de 2, então cada um desses números precisa ser uma potência de 2. Mas note que, se x for positivo, a única maneira de $10 + x$ e $10 - x$ serem potência de 2 ao mesmo tempo é se $x = 6$, pois

$10 + 1 = 11$	$10 - 1 = 9 = 3^2$
$10 + 2 = 12 = 2^2 \cdot 3$	$10 - 2 = 8 = 2^3$
$10 + 3 = 13$	$10 - 3 = 7$
$10 + 4 = 14 = 7^2$	$10 - 4 = 6 = 2 \cdot 3$
$10 + 5 = 15 = 3 \cdot 5$	$10 - 5 = 5$
$10 + 6 = 16 = 2^4$	$10 - 6 = 4 = 2^2$
$10 + 7 = 17$	$10 - 7 = 3$
$10 + 8 = 18 = 2 \cdot 3^2$	$10 - 8 = 2$
$10 + 9 = 19$	$10 - 9 = 1$
$10 + 10 = 20$	$10 - 10 = 0.$

No que x só pode ser um número entre 1 e 10, caso contrário, teríamos que $10 - x$ seria um número negativo, ou seja, não seria potência de 2. Uma análise análoga se faz considerando x negativo. Assim, x é realmente igual a 6. Agora, conseguimos calcular o que a questão pede:

$$(4x)^4 = (4 \cdot 6)^4 = 4^4 \cdot 6^4 = 16^2 \cdot 36^2 = 256 \cdot 1296 = 331776.$$

Portanto, como $3 + 3 + 1 + 7 + 7 + 6 = 27$, a alternativa correta é a letra (e).

7. (Auxiliar de Laboratório - USP - 2025 - FUVEST) Em um laboratório de química, um cientista está misturando um reagente químico a uma solução líquida. A cada minuto, o cientista adiciona 5 mL desse reagente à solução inicial, que já tinha 20 mL. Se x representa o tempo em minutos, qual equação expressa corretamente o volume total $V(x)$ da solução em função do tempo?
- (a) $V(x) = 5x + 20$
 - (b) $V(x) = 20x + 5$
 - (c) $V(x) = 5x - 20$
 - (d) $V(x) = x + 5 + 20$
 - (e) $V(x) = 25x$

Resolução: O que o enunciado quer é que encontremos a função que recebe o tempo em minutos e retorne a quantidade de reagentes em mL. Chamemos tal função de $V(x)$, como propõem as alternativas. Como a informação é de que já tinha 20mL desse reagente, basta ir testando valores para ter noção de qual é a "cara" da função. Vamos ver o que acontece depois de alguns minutos. Como a cada minuto é adicionado 5mL do reagente, temos que ir somando 5 ao valor da função para cada minuto que aumentamos no argumento da função, isto é, no valor de x , mas nos baseando na quantidade anterior que já tinha. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Depois de 1 minuto} &\Rightarrow V(1) = 5 + 20 = 25. \\ \text{Depois de 2 minuto} &\Rightarrow V(2) = 5 + V(1) = 5 + 25 = 5 + 5 + 20 = 5 \cdot 2 + 20. \\ \text{Depois de 3 minuto} &\Rightarrow V(3) = 5 + V(2) = 5 + (5 \cdot 2 + 20) = 5 \cdot 3 + 20. \\ \text{Depois de 4 minuto} &\Rightarrow V(4) = 5 + V(3) = 5 + (5 \cdot 3 + 20) = 5 \cdot 4 + 20. \\ \text{Depois de 5 minuto} &\Rightarrow V(5) = 5 + V(4) = 5 + (5 \cdot 4 + 20) = 5 \cdot 5 + 20.\end{aligned}$$

Conseguiu perceber um padrão? Justamente! A cada x minutos, temos os 20mL que já tínhamos mais $5 \cdot x$ mL dados pela função. Assim, temos que $V(x) = 5x + 20$. Alternativa (a).

8. (UFES) Se $A = \{-2, 3, m, 8, 15\}$ e $B = \{3, 5, n, 10, 13\}$ são subconjuntos de $\mathbb{Z}$ (números inteiros), e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então
- (a) $n - m \in A$
 - (b) $n + m \in A$
 - (c) $m - n \in A$
 - (d) $mn \in A$
 - (e) $\{m + n, mn\} \subseteq A$

Resolução: Note que como $A \cap B = \{-2, 3, m, 8, 15\} \cap \{3, 5, n, 10, 13\} = \{3, 8, 10\}$, então é porque os elementos 3, 8 e 10 pertencem aos dois conjuntos. Mas, como no conjunto A não aparece explicitamente o número 10, podemos concluir que $m = 10$. De modo análogo, concluímos que $n = 8$. Assim, analisando todas as possibilidades, temos que

$$\begin{aligned}n - m &= 8 - 10 = -2 \in A, \\ n + m &= 8 + 10 = 18 \notin A, \\ m - n &= 10 - 8 = 2 \notin A, \\ mn &= 10 \cdot 8 = 80 \notin A, \\ \{m + n, mn\} &= \{10 + 8, 10 \cdot 8\} = \{18, 80\} \not\subseteq A.\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (a).

9. (MACKENZIE) Considere as afirmações a seguir

- (I) Se $\{5, 7\} \subseteq A$ e $A \subseteq \{5, 6, 7, 8\}$, então os possíveis conjuntos A são em números de 4.
- (II) Supondo A e B conjuntos quaisquer, então sempre temos $(A \cap \emptyset) \cup (B \cup \emptyset) = A \cup B$.
- (III) A soma de dois números irracionais pode ser racional.

Das afirmações anteriores:

- (a) I, II e III são verdadeiras.
- (b) apenas I e II são verdadeiras.
- (c) apenas III é verdadeira.
- (d) apenas II e III são verdadeiras.
- (e) apenas I e III são verdadeiras.

Resolução: Analisemos cada uma das afirmações:

- (I) Sabemos que A deve conter os números 5 e 7 pelo menos. Como ele está contido em um outro conjunto com 4 sendo que dois deles já sabemos que estão no A , então temos as seguintes possibilidades para A : $\{5, 7\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{5, 7, 8\}$ e $\{5, 6, 7, 8\}$. Logo, existem 4 possíveis conjuntos A e, assim, a esta afirmação é verdadeira.
- (II) Note que, dados A e B conjuntos quaisquer, sempre teremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $B \cup \emptyset = B$. Logo, $(A \cap \emptyset) \cup (B \cup \emptyset) = \emptyset \cup B = B \neq A \cup B$, se $A \not\subseteq B$. Um exemplo para ficar mais é claro, é tomar $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Teremos que

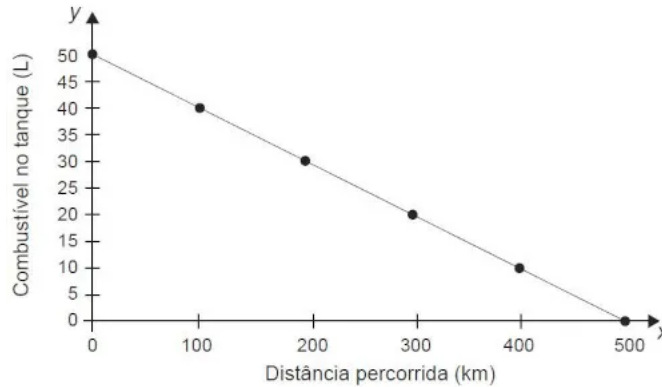
$$(A \cap \emptyset) \cup (B \cup \emptyset) = \emptyset \cup \{2, 3\} = \{2, 3\} \neq \{1, 2, 3\} = A \cup B.$$

Portanto, tal afirmação é falsa.

- (III) Essa afirmação é verdadeira. Basta considerar um número irracional qualquer e seu oposto. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Ambos são irracionais, mas $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ e 0 pertence ao conjunto dos racionais. Outro exemplo seria tomarmos os números $2 + \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Novamente, ambos são irracionais, mas $2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \in \mathbb{Q}$. Destarte, essa afirmação é verdadeira.

Daí, concluímos que a alternativa correta é a letra (e).

10. (ENEM 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



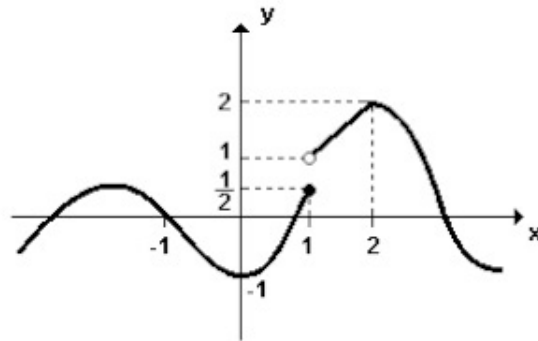
A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no taque e a distância percorrida pelo automóvel é:

- (a) $y = -10x + 500$
- (b) $\frac{-x}{10} + 50$
- (c) $\frac{-x}{10} + 500$
- (d) $\frac{x}{10} + 50$
- (e) $\frac{x}{10} + 500$

Resolução: Esta é uma clássica questão de interpretação de gráfico para encontrar a função a qual é descrita por ele. Bom, primeiramente, é bom entendermos que os valores que estão no eixo x são os argumentos da função em quantidade de quilômetros percorridos. Os valores do eixo y é o valor da função, dado o argumento x , em litros de combustível restantes. Perceba que essa função recebe o deslocamento feito em quilômetros e retorna o quanto de combustível ainda resta em litros. Em termos matemáticos, $y = f(x)$. Assim, vamos descobrir qual alternativa expressa melhor a função que estamos vendo na figura. Sabemos que são colocados 50L de combustível antes do carro começar a se mover, então temos $f(0) = 50$. Pelo gráfico, $f(500) = 0$. Assim, a expressão da função tem que conter um termo constante de 50L e o termos que depende do x tem que ser negativo, já que observamos que a função é decrescente. Daí, já saberíamos que se trata da letra (b).

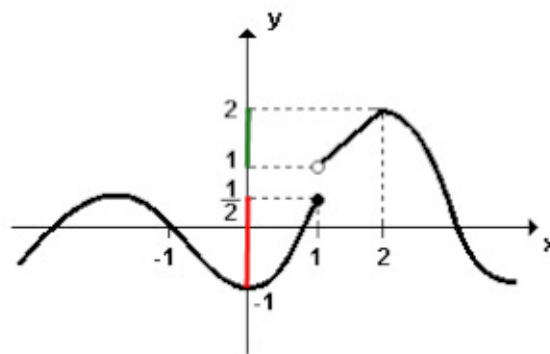
Observação: Note que para fazer essa questão com detalhe precisaríamos perceber que se trata de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$. Já saberíamos que $b = 50$ e faltaria achar o valor de a . Analisando $f(500)$, daria para achar que $a = \frac{-1}{10}$, mas não foi necessário. Fica como exercício para vocês hehehe.

11. (UFRRJ) No gráfico a seguir, a imagem do intervalo $[-1, 2[$ é:



- (a) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]-2, 1]$.
- (b) $\left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup [-2, 1[$.
- (c) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cup]1, 2[$.
- (d) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup]1, 2[$.
- (e) $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$.

Resolução: Lembremos que a imagem está representada no eixo y . Como a função não é contínua, isto é, como no ponto 1 ela dá um solto, vamos analisar o que ocorre quando $x \in [-1, 1]$ e depois quando $x \in]1, 2[$ (isto porque o intervalo pedido pelo enunciado é $[-1, 2[$ que é igual a $[-1, 1] \cup]1, 2[$). Assim, vamos olhar para esses intervalos e ver qual intervalo é gerado quando projetamos os pontos da função no eixo y . Assim, temos:



Quando $x \in [-1, 1]$, temos que $y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ (representado de vermelho).

Já quando $x \in]1, 2[$, temos que $y \in]1, 2[$ (representado de verde, porém sem incluir os extremos 1 e 2, ou seja, há uma bolinha aberta nos extremos da reta verde).

A imagem vai ser justamente a união desses dois intervalos. Portanto, a imagem será $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup]1, 2[$.
Logo, a alternativa correta é a letra (d).

12. (FGV) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos: A, B e C. Os resultados da pesquisa indicaram que:

210 pessoas compram o produto A,
210 pessoas compram o produto B,
20 pessoas compram os 3 produtos,
100 pessoas não compram nenhum dos 3 produtos,
60 pessoas compram os produtos A e B,
70 pessoas compram os produtos A e C,
50 pessoas compram os produtos B e C.

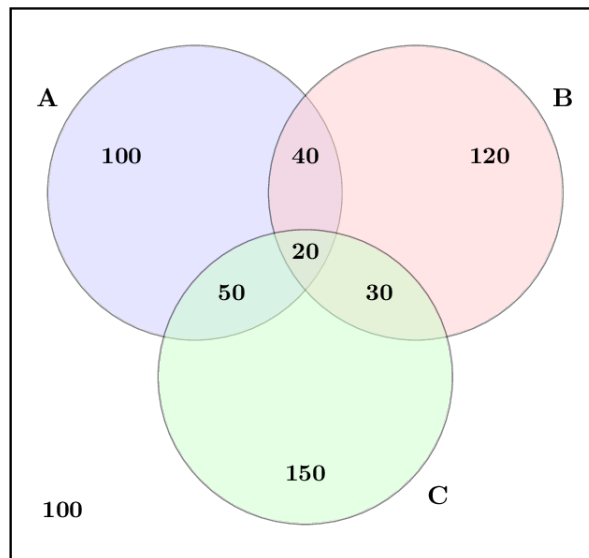
Quantas pessoas foram entrevistadas?

- (a) 670
(b) 970
(c) 870
(d) 610
(e) 510

Resolução: Para ilustrar este problema, podemos usar o Diagrama de Venn. Mas antes, vamos analisar as informações. Para esse tipo de questão precisamos saber analisar quais intersecção existem entre os conjuntos das pessoas que preferem os produtos A, B ou C. Chamemos tais conjuntos pelo nome dos produtos. Observe que há duas informações que nos ajudarão muito. O fato de que há 20 pessoas que compram os 3, indica que a intersecção dos 3 conjuntos é composta justamente por 20 pessoas. Além disso, 100 pessoas não estão em nenhum dos conjuntos. Com estes dados, podemos achar os valores das outras intersecções e o valor dos que só compraram especificamente um produto. Assim, temos que:

Quantidade de pessoas que compram apenas os produtos A e B: $60 - 20 = 40$.
Quantidade de pessoas que compram apenas os produtos A e C: $70 - 20 = 50$.
Quantidade de pessoas que compram apenas os produtos B e C: $50 - 20 = 30$.
Quantidade de pessoas que compram apenas o produto A: $210 - 40 - 50 - 20 = 100$.
Quantidade de pessoas que compram apenas o produto B: $210 - 40 - 30 - 20 = 120$.
Quantidade de pessoas que compram apenas o produto C: $250 - 50 - 30 - 20 = 150$.

Observando pelo diagrama de Venn, temos:

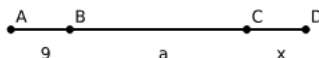


Assim, considerando os 100 que não compraram, basta somar essas quantidades. Logo, o número total de pessoas entrevistadas foi de $100 + 150 + 50 + 30 + 20 + 100 + 40 + 120 = 610$. Portanto, alternativa (d).

Frente 3: Geometria Plana

13. (OBMEP - Portal da Matemática) Dados quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma mesma reta tais que $AB \cdot BD = AC \cdot CD$. Se $AB = 9\text{cm}$, encontre o valor de CD .

Resolução: Primeiramente, é bom que desenhemos a situação para entendermos bem as informações que temos. Antes, daremos ‘nomes aos bois’, ou seja, vamos batizar os segmentos que não conhecemos. Combinemos que $BC = a$ e $CD = x$, tudo bem? Pelo anunciado, a figura seria da seguinte forma:



Deste modo, seque que:

$$\begin{aligned} AB \cdot BD &= AC \cdot CD \\ \Downarrow \\ 9(a + x) &= (9 + a)x \\ \Downarrow \\ 9a &= ax \\ \Downarrow \\ 9 &= x. \end{aligned}$$

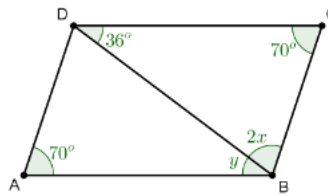
Portanto, concluímos que $CD = 9\text{cm}$.

14. (OBMEP - Portal da Matemática) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos AB e BC , contidos numa mesma reta de modo que $AB = BC$, com $A \neq C$. É sempre verdade que MN é congruente a AB ? Justifique.

Resolução: Sim. Isso ocorre por causa da propriedade de que o ponto médio dista um valor igual comparado com os seus extremos. Assim, temos que

$$MN = MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \stackrel{AB=BC}{=} \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB.$$

15. (OBMEP - Portal da Matemática) Determine $x + y$ no paralelogramo abaixo.

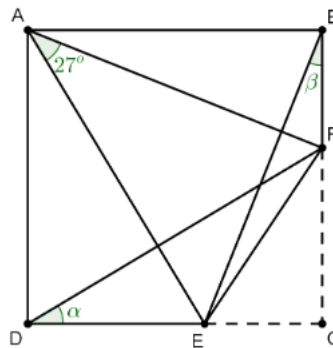


Resolução: Como se trata de um paralelogramo, temos o seguinte: $AB = CD$ e $AD = BC$. Além disso, pela igualdade entre os ângulos em A e em C , temos que $\triangle ABD = \triangle CDB$. Sendo assim, usando as propriedades de ângulos alternos internos, segue que $y = 36^\circ$. Ademais, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , segue que:

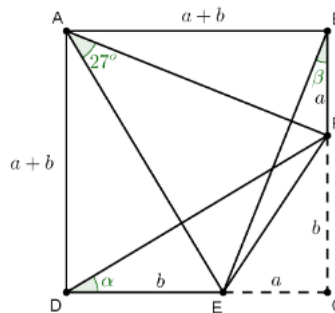
$$2x + 70^\circ + 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ.$$

Portanto, $x + y = 36^\circ + 37^\circ = 73^\circ$.

16. (OBMEP - Portal da Matemática) O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura a seguir?

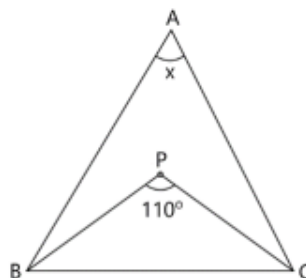


Resolução: Para a visualização ficar mais fácil, vamos batizar alguns seguimentos. Seguimentos que serão convenientes são os que formam o triângulo retângulo no canto inferior direito da figura. Digamos que $a = CE$ e $b = CF$. Assim, pelo enunciado, o lado desse quadrado vale $a + b$. Deste modo, $BF = a + b - b = a$. Como os triângulos $\triangle ABF$ e $\triangle BCE$ possuem os mesmos dois lados separados pelo mesmo ângulo em comum, isto é, o de 90° , temos que eles são triângulos congruentes (pense um pouco no porquê dessa afirmação e, caso nunca tenha visto, pesquise um pouco sobre congruência de triângulos) e segue que $\angle BAF = \angle CBE = \beta$. De modo análogo, conseguimos concluir que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle DCF$ são congruentes e, portanto, $\angle DAE = \angle CDF = \alpha$. Como $\angle DAB = 90^\circ$, obtemos que $\alpha + \beta + 27^\circ = 90^\circ$, isto é, $\alpha + \beta = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$. Abaixo está uma figura que representa o raciocínio que tivemos:



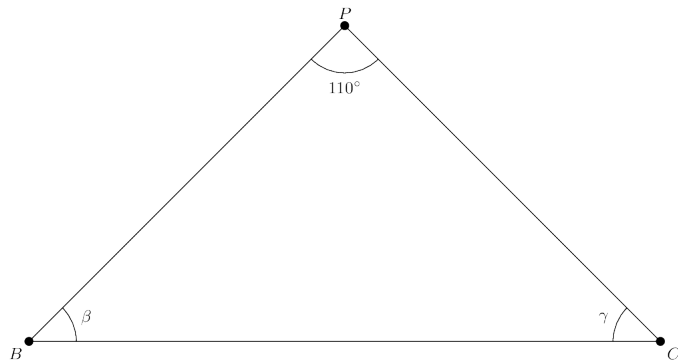
Tente enxergar onde estão os outros ângulos α e β que concluímos na resolução. Boa reflexão :-)

17. (IBFC 2023: SEE-AC) No triângulo abaixo, o ponto P é o incentro do triângulo $\triangle ABC$, que é escaleno. Sabemos que a medida do ângulo $\angle BPC$ é igual a 110° , assinale a alternativa que apresenta a medida do ângulo $\angle BAC$.

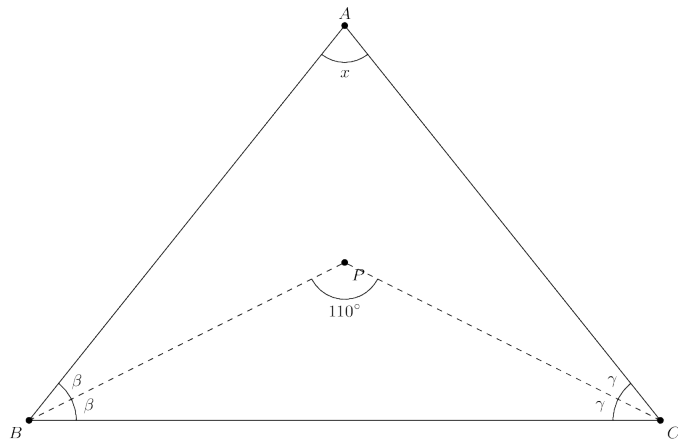


- (a) 40°
- (b) 20°
- (c) 30°
- (d) 50°

Resolução: Primeiramente, consideremos o triângulo $\triangle PBC$. Chamemos os ângulos $\angle PBC$ de β e $\angle BCP$ de γ . Ou seja, temos



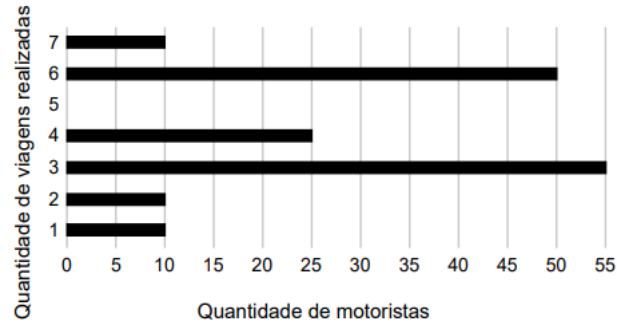
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então $\beta + \gamma + 110^\circ = 180^\circ$. Logo, $\beta + \gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Como P é o incentro do triângulo $\triangle ABC$, temos a seguinte figura:



Usando o mesmo raciocínio anterior, concluímos que $x + 2\beta + 2\gamma = x + 2(\beta + \gamma) = x + 2 \cdot 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$. Portanto, temos como resposta a alternativa (a).

Frente 4: Estatística

18. (ENEM 2023) Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.



Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se

- (a) mediana = média < moda.
- (b) mediana = moda < média.
- (c) mediana < média < moda.
- (d) moda < média < mediana.
- (e) moda < mediana < média.

Resolução: Note que o enunciado quer tais informações baseada na quantidade de viagens. Então, os dados que analisaremos estão na seguinte lista:

$$\underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{10 \text{ vezes}}, \underbrace{\{2, 2, \dots, 2\}}_{10 \text{ vezes}}, \underbrace{\{3, 3, \dots, 3\}}_{55 \text{ vezes}}, \underbrace{\{4, 4, \dots, 4\}}_{25 \text{ vezes}}, \underbrace{\{6, 6, \dots, 6\}}_{50 \text{ vezes}}, \underbrace{\{7, 7, \dots, 7\}}_{10 \text{ vezes}}.$$

Como a moda é o termo que mais se repete, então já temos que moda = 3. Agora, para achar a mediana, temos que encontrar o termo do meio. Como temos 160 termos nesta lista, basta que façamos uma média aritmética entre os termos que estão nas posições 80 e 81. Pela nossa lista, ambos os termos estão entre os 25 4's, então concluímos que a mediana é 4. Por fim, calculemos a média.

$$\text{média} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 50 + 7 \cdot 10}{160} = \frac{665}{160} > 4, \text{ pois } 160 \cdot 4 = 640.$$

Portanto, moda < mediana < média, isto é, alternativa (e).

19. (ENEM 2024) A umidade relativa do ar é um dos indicadores utilizados na meteorologia para fazer previsões sobre o clima. O quadro apresenta as médias mensais, em porcentagem, da umidade relativa do ar em um período de seis meses consecutivos em uma cidade.

Meses	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.
Média mensal da umidade relativa do ar (%)	66	64	54	46	60	64

Nessa cidade, a mediana desses dados, em porcentagem, da umidade relativa do ar no período considerado foi

- (a) 56.
- (b) 58.
- (c) 59.
- (d) 60.
- (e) 62.

Resolução: Primeiro, coloquemos os dados em uma lista em ordem crescente, o famoso “rol”. Assim, temos $\{46, 54, 60, 64, 64, 66\}$. Como a quantidade de elementos na lista é par (6 meses), então basta fazermos a média aritmética dos termos centrais (3^o e 4^o temos). Logo,

$$\frac{60\% + 64\%}{2} = 62\%.$$

Logo, alternativa (e).

20. (FUVEST 2024) Os conceitos de moda, mediana, média e amplitude definem medidas utilizadas para estudar um conjunto de informações numéricas. Por exemplo, na lista de 5 números $\{2, 2, 4, 8, 14\}$, temos que a moda é igual a 2, a mediana é igual a 4, a média é igual a 6 e a amplitude é igual a 12.

Assinale a alternativa que representa a quantidade de listas de 5 números inteiros positivos que cumprem a condição: moda = média = amplitude = 23.

- (a) 8
- (b) 9
- (c) 11
- (d) 22
- (e) 44

Resolução: Pelo enunciado, precisamos ter a mediana igual a 23 e como nossas possíveis listas possuem 5 elementos, ou seja, uma quantidade ímpar, o termo que está no meio da lista será o 23. Além disso, sabemos que a amplitude precisa ser também 23. Logo, o último elemento das possíveis listas devem ter o último elemento sendo o primeiro elemento somado com 23. Portanto, devemos ter uma lista com no formato $\{a, b, 23, c, a + 23\}$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ (conjunto dos inteiros positivos). Falta-nos observar as condições sobre a moda e a média. O fato da moda ser 23 nos

indica que o número 23 deve aparecer na nossa lista pelo menos 2 vezes e não podendo aparecer mais de 3 vezes, pois se aparecesse 4 vezes, teríamos a lista $\{23, 23, 23, 23, 46\}$ que não possui média 23. Assim, temos os seguintes casos para analisar:

- **Caso (I):** $\{a, 23, 23, 23, a + 23\}$
- **Caso (II):** $\{a, b, 23, 23, a + 23\}$, com $a < b < 23$.
- **Caso (III):** $\{a, 23, 23, c, a + 23\}$, com $23 < c < a + 23$.

Deste modo, considerando que a média deve ser 23, analisemos o que ocorre em cada caso:

$$(I): \text{média} = \frac{a + 23 + 23 + 23 + (a + 23)}{5} = \frac{2a + 4 \cdot 23}{5} = 23 \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 23 - 4 \cdot 23}{2} = \frac{23}{2} \notin \mathbb{Z}_+.$$

Logo, este caso não pode ocorrer.

$$(II): \text{média} = \frac{a + b + 23 + 23 + (a + 23)}{5} = \frac{2a + b + 3 \cdot 23}{5} = 23 \Rightarrow 2a + b = 5 \cdot 23 - 3 \cdot 23 = 2 \cdot 23.$$

Logo, $b = 46 - 2a$. Como nesse caso temos que ter $a < b < 23$, segue que $a < 46 - 2a < 23$. Olhemos para essas desigualdades separadamente.

$$a < 46 - 2a \Rightarrow 3a < 46 \Rightarrow a < \frac{46}{3}.$$

$$46 - 2a < 23 \Rightarrow 23 < 2a \Rightarrow \frac{23}{2} < a.$$

Portanto, $11 < \frac{23}{2} < a < \frac{46}{3} < 16$. Como a precisa ser um inteiro positivo, temos as seguintes possibilidades para a : $a \in \{12, 13, 14, 15\}$. Tendo os valores de a , achamos também os de b e assim, conseguimos montar as seguintes listas com as propriedades do enunciado:

$$\begin{aligned} &\{12, 22, 23, 23, 35\} \\ &\{13, 20, 23, 23, 36\} \\ &\{14, 18, 23, 23, 37\} \\ &\{15, 16, 23, 23, 38\} \end{aligned}$$

$$(III): \text{média} = \frac{a + 23 + 23 + c + (a + 23)}{5} = 23 \Rightarrow c = 46 - 2a.$$

Aqui fui mais direto porque é a mesma estrutura da conta do caso anterior. A condição que temos agora é que $23 < c < a + 23$, então $23 < 46 - 2a < a + 23$. Analisando as desigualdades, temos:

$$23 < 46 - 2a \Rightarrow 2a < 23 \Rightarrow a < \frac{23}{2}.$$

$$46 - 2a < a + 23 \Rightarrow 23 < 3a \Rightarrow \frac{23}{3} < a.$$

Assim, $7 < \frac{23}{3} < a < \frac{23}{2} < 12$. Novamente, como a deve ser inteiro positivo, $a \in \{8, 9, 10, 11\}$. Assim, temos as outras possíveis listas:

$$\begin{aligned} &\{8, 23, 23, 30, 31\} \\ &\{9, 23, 23, 28, 32\} \\ &\{10, 23, 23, 26, 33\} \\ &\{11, 23, 23, 24, 34\} \end{aligned}$$

Portanto, o número de listas possíveis com tais propriedades é 8. Alternativa (a).

Observação: Notem que eu evitei fazer as contas na desigualdade para ganhar tempo. Para eu concluir que $7 < \frac{23}{3}$ eu pensei que $7 \cdot 4 = 28$ e como $7 \cdot 3 = 21$, não é difícil enxergar que $7 < \frac{23}{3}$.

O mesmo raciocínio eu usair para afirmar que $\frac{43}{3} < 16$. Isso tudo só para deixar claro que não precisamos ir fazendo contas da questão se nós nos atentarmos a esses nuances.