



**SALVAGUARDA**



# **RESOLUÇÃO COMENTADA**

**A**

**C**

**B**

**D**

**E**

*Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de **julho**.*



## **Resolução comentada da lista de julho – matemática**

## Frentes 8, 9 e 11: Geometria Analítica; Trigonometria; Geometria Espacial

1. (FGV) No plano cartesiano, o ponto P possui coordenadas iguais e é equidistante dos pontos  $(-1, 7)$  e  $(1, 3)$ . O ponto P é
- (a) (9,9)
  - (b) (10,10)
  - (c) (11,11)
  - (d) (12,12)
  - (e) (13,13)

**Resolução:** (por Amanda Costa) A equação da distância entre dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  no plano cartesiano é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Vamos chamar as coordenadas de P de  $(w, w)$ , uma vez que  $x$  deve ser igual a  $y$  para que as coordenadas sejam iguais. A distância de P a  $(-1, 7)$  deve ser igual à distância de P a  $(1, 3)$ . Portanto, a equação é:

$$\sqrt{(-1 - w)^2 + (7 - w)^2} = \sqrt{(1 - w)^2 + (3 - w)^2}.$$

Vamos resolver essa equação:

$$(-1 - w)^2 + (7 - w)^2 = (1 - w)^2 + (3 - w)^2.$$

Expandindo e simplificando ambos os lados usando o produto notável  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , teremos:

$$1 - 2 \cdot (-1) \cdot w + w^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot w + w^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot w + w^2 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot w + w^2.$$

Simplificando ambos os lados:

$$1 + 2w + w^2 + 49 - 14w + w^2 = 1 - 2w + w^2 + 9 - 6w + w^2.$$

Agrupando termos semelhantes:

$$50 - 12w + 2w^2 = 10 - 8w + 2w^2,$$

subtraindo  $2w^2$  de ambos os lados:

$$50 - 12w = 10 - 8w.$$

Adicionando  $8w$  e subtraindo  $50$  de ambos os lados:

$$-4w = -40$$

Por fim:

$$w = \frac{-40}{-4} = 10.$$

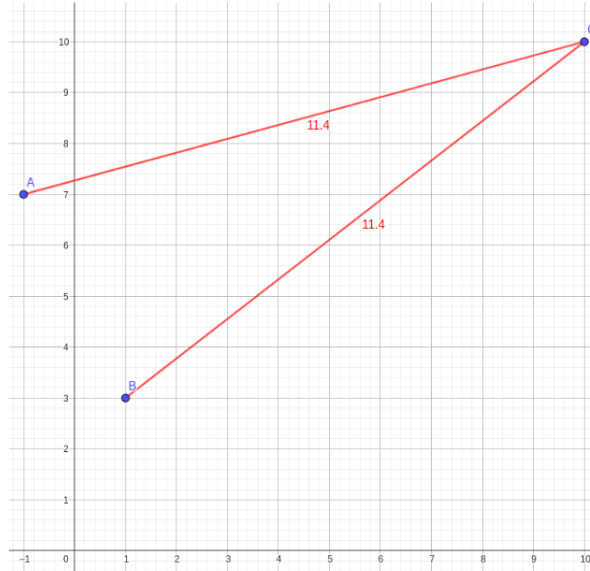
Portanto, as coordenadas de P são  $(10, 10)$ , **alternativa (b)**.

2. (UFMG 2011 - Adaptada) Considere as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  de equações, respectivamente,

$$y = 2x - 4, \quad y = -x + 11, \quad y = \frac{x + 7}{5}.$$

- (a) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção  $A = r \cap s$ ,  $B = r \cap t$  e  $C = s \cap t$ .  
(b) Determine a área do triângulo  $ABC$ .

**Resolução:** (por Amanda Costa)



- (a)  $A = r \cap s$ . Para resolver esse problema, podemos considerar que, se ambas são iguais a  $y$ , então podemos igualar o segundo membro da primeira equação ao segundo membro da segunda equação.

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= -x + 11 \\ 2x + x &= 11 + 4 \\ 3x &= 15 \\ x &= \frac{15}{3} = 5. \end{aligned}$$

Para encontrar o valor de  $y$ , basta substituir o valor encontrado para  $x$  em uma das duas equações:

$$y = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção  $r \cap s$  são  $A = (5, 6)$ .

$B = r \cap t$ . Para resolver esse problema, podemos considerar que, se ambas são iguais a  $y$ , então podemos igualar o segundo membro da primeira equação ao segundo membro da segunda

equação.

$$\begin{aligned}2x - 4 &= \frac{x + 7}{5} \\5 \cdot (2x - 4) &= x + 7 \\10x - 20 &= x + 7 \\10x - x &= 7 + 20 \\9x &= 27 \\x &= \frac{27}{9} = 3.\end{aligned}$$

Para encontrar o valor de  $y$ , basta substituir o valor encontrado para  $x$  em uma das duas equações:

$$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção  $B = (3, 2)$ .

$C = s \cap t$ . Para resolver esse problema, podemos considerar que, se ambas são iguais a  $y$ , então podemos igualar o segundo membro da primeira equação ao segundo membro da segunda equação.

$$\begin{aligned}-x + 11 &= \frac{x + 7}{5} \\5 \cdot (-x + 11) &= x + 7 \\-5x + 55 &= x + 7 \\-5x - x &= 7 - 55 \\-6x &= -48 \\x &= \frac{-48}{-6} = 8.\end{aligned}$$

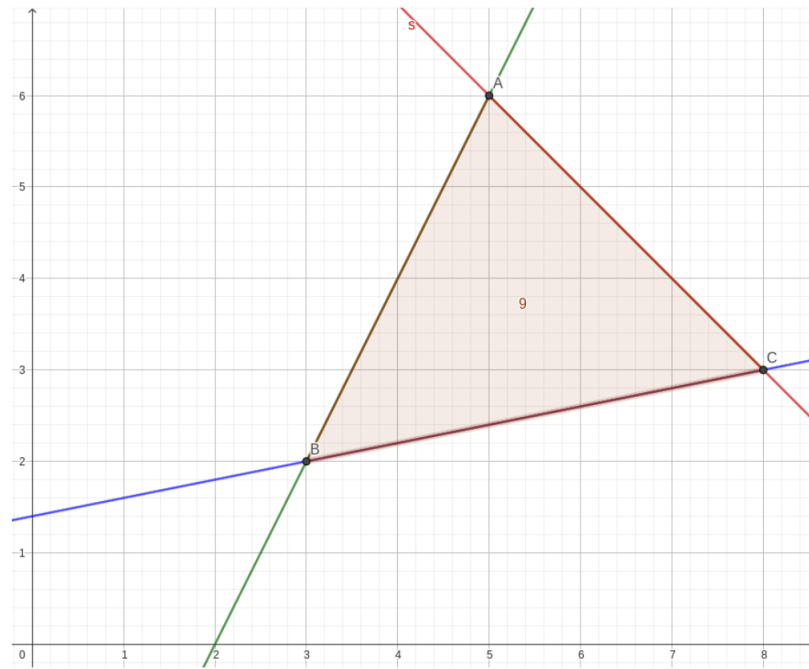
Para encontrar o valor de  $y$ , basta substituir o valor encontrado para  $x$  em uma das duas equações:

$$y = -8 + 11 = 3.$$

Portanto, as coordenadas de  $C = (8, 3)$ .

- (b) Para encontrar a área deste triângulo levaremos em consideração as coordenadas encontrados anteriormente, pois estas serão os vértices:

$$A = (5, 6), \quad B = (3, 2), \quad C = (8, 3).$$



O primeiro passo será encontrar o determinante das coordenadas dos pontos A, B e C, teremos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1º Passo: Repita as duas primeiras colunas à direita da matriz

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

2º Passo: Multiplique os elementos das diagonais que possuem três elementos, no sentido da diagonal principal

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(5 \cdot 2 \cdot 1) + (6 \cdot 1 \cdot 8) + (1 \cdot 3 \cdot 3)$$

3º Passo: Some os produtos das diagonais principais

$$10 + 48 + 9 = 67$$

4º Passo: repita o procedimento feito anteriormente, mas agora com as diagonais secundárias:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 5 & 6 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right|$$

$$(8 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 5) + (1 \cdot 3 \cdot 6) = 16 + 15 + 18 = 49$$

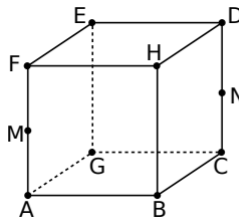
5º Passo: subtraia o resultado da diagonal secundária da principal:

$$\text{Det} = 67 - 49 = 18$$

Calculando o determinante, podemos encontrar a área pela fórmula:  $\text{área} = \frac{1}{2} \cdot |\text{Det}|$ :

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

3. (OBMEP - Banco de Questões 2013) Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo abaixo, faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm.



Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

- Do vértice A ao vértice B?
- Do ponto M ao ponto N?
- Do vértice A ao vértice D?

**Resolução:** (por Amanda Costa)

A distância percorrida pela formiga em cada caso é:

a) do vértice A ao vértice B: 1 cm;

Para ir do vértice A ao vértice B, basta a formiga percorrer a aresta AB, que mede 1 cm, conforme indicado no enunciado.

$$AB = 1 \text{ cm}$$

b) do ponto M ao ponto N: 2 cm;

Para ir do ponto M ao ponto N, a formiga irá em linha do ponto M até o ponto médio de HB, percorrendo assim a mesma medida da aresta AB, logo 1 cm. Depois, ela seguirá até N, percorrendo a mesma medida da aresta BC, logo 1 cm de novo.

$$1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

c) do vértice A ao vértice D:  $1 + \sqrt{2}$  cm.

Para ir do ponto A ao ponto D, a formiga percorrerá a aresta AF e a diagonal FD.

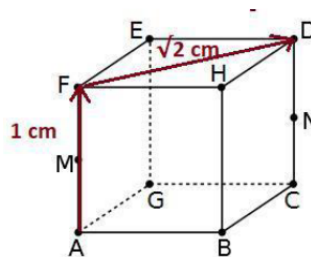
A diagonal do quadrado de lado 1 cm mede:

$$d = L\sqrt{2}$$

$$d = 1\sqrt{2}$$

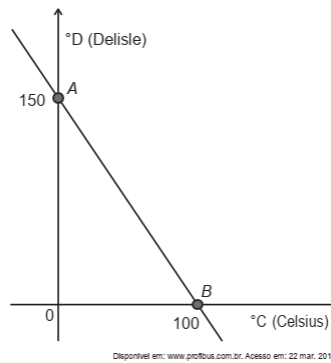
$$d = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Portanto, ela percorrerá  $1 + \sqrt{2}$  cm.



4. (ENEM 2022) A escala de temperatura Delisle ( $^{\circ}D$ ), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius ( $^{\circ}C$ ) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.





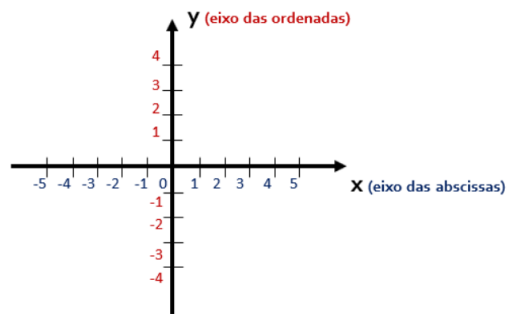
Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

- (a)  $2D + C = 100$
- (b)  $2D + 3C = 150$
- (c)  $3D + 2C = 300$
- (d)  $2D + 3C = 300$
- (e)  $3D + 2C = 450$

**Resolução:** (por Tiago Alves) Para acharmos a relação algébrica, basta encontrarmos a equação da reta. A equação da reta é da forma:

$$y = ax + b,$$

onde  $y$  representa o eixo das ordenadas (vertical) e  $x$  o eixo das abcissas (horizontal),  $a$  é o coeficiente angular e  $b$  o coeficiente linear.



Em comparação com o gráfico da questão, observamos que  $y = D$  e  $x = C$ . Ou seja, a equação da reta pro gráfico da questão será:

$$D = aC + b$$

Precisamos, portanto, encontrar os valores de  $a$  e  $b$ .

**Encontrando b:**  $b$  é o coeficiente linear, e seu valor é o valor da reta quando ela cruza o eixo  $y$  (ou seja, quando  $x = 0$ ), observando no gráfico da questão vemos que a reta cruza o eixo  $y$  quando  $y = 150$ , portanto  $b = 150$ .

**Encontrando a:** Seja  $A$  um ponto da reta com coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $B$  outro ponto da reta cujas coordenadas são  $(x_2, y_2)$ , o coeficiente angular da reta é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observe no gráfico da questão que o ponto  $A$  tem coordenadas  $A = (0, 150)$  e o ponto  $B$  tem coordenadas  $(100, 0)$ . Substituindo esses valores na equação acima, obtemos:

$$a = \frac{0 - 150}{100 - 0}$$

$$a = -\frac{150}{100}$$

$$a = -\frac{15}{10}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Por fim, basta substituírmos os valores de  $a$  e  $b$  na equação da reta:

$$D = -\frac{3}{2}C + 150$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por 2:

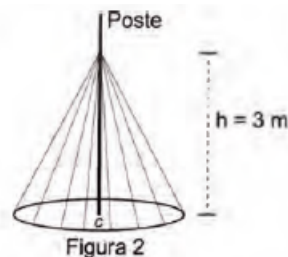
$$2D = \left(-\frac{3}{2}C + 150\right) \times 2$$

$$2D = -3C + 300$$

$$2D + 3C = 300,$$

**alternativa (d).**

5. (ENEM 2020) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.



A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto  $C$  (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

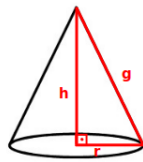
Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

- (a) 4,00.
- (b) 4,87.
- (c) 5,00.
- (d) 5,83.
- (e) 6,26.

**Resolução:** (por Lucas Lopes) Quando falamos do sólido geométrico “Cone”, há de notar a relação entre 3 parâmetros:

- Raio da circunferência que forma a sua base (chamado aqui de  $r$ );
- Altura do cone (chamada aqui de  $h$ );
- Geratriz do cone (chamada aqui de  $g$ ).

De fato, a figura abaixo deixa clara a relação entre tais parâmetros:



Note que a altura, o raio da base e a geratriz do cone formam um triângulo retângulo, onde a geratriz é a hipotenusa e os demais parâmetros, os catetos. Portanto, uma maneira simples de determinar a medida de qualquer um destes parâmetros é aplicar o Teorema de Pitágoras, conforme expressada a seguir:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

No caso deste exercício, é solicitado o valor do raio da base ( $r$ ), e os valores da altura ( $h$ ) e da geratriz ( $g$ ) são dados de maneira direta e indireta, respectivamente. O enunciado fala que o poste onde serão penduradas as mangueiras tem 3 metros de altura. Logo,

$$h = 3m$$

As mangueiras serão penduradas de modo a ocupar a posição da geratriz do cone. Segundo o enunciado, serão utilizados 100 metros de mangueira, divididas em 20 segmentos de igual tamanho, uma vez que, ao serem fixados no chão, dividirão a circunferência da base em 20 arcos iguais. Portanto,

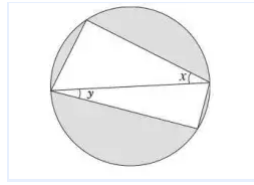
$$g = \frac{100}{20}$$
$$g = 5m$$

Com estas informações, torna-se possível o cálculo do raio da circunferência através do Teorema de Pitágoras.

$$5^2 = 3^2 + r^2$$
$$25 = 9 + r^2$$
$$16 = r^2$$
$$r = \pm 4m$$

Como se trata de uma medida, o valor negativo não convém, restando o valor de 4 metros para o raio da circunferência, o que está afirmado na **alternativa (a)**.

6. (FUVEST 2018) O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.

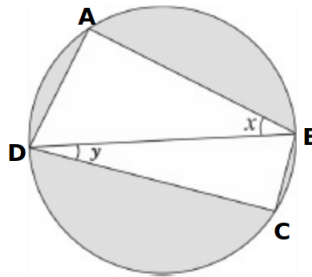


Sendo  $x$  e  $y$  as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de  $x$  e  $y$ , é:

- (a)  $\pi + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2y)$   
 (b)  $\pi - \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2y)$   
 (c)  $\pi - \cos(2x) + \cos(2y)$   
 (d)  $\pi - \frac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$   
 (e)  $\pi - \frac{\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2y)}{2}$

**Resolução:** (por Lucas Lopes) Os exercícios de Geometria Plana, via de regra, exigem do estudante uma boa capacidade de ver o desenho, interpretar a situação e aplicar os conhecimentos adquiridos, fazendo que um exercício seja diferente do outro, por mais semelhantes que sejam.

No caso deste, o primeiro segredo é não se assustar com as alternativas, e sim, prestar atenção do desenho, copiado a seguir:



Note que a região cinza nada mais é do que a área da circunferência (de raio igual a 1), menos a área do quadrilátero branco. A área desta circunferência vale:

$$A_1 = \pi r^2$$

$$A_1 = \pi \cdot 1^2$$

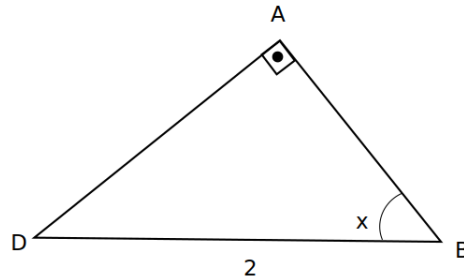
$$A_1 = \pi$$

Quanto ao quadrilátero branco, note que ele é composto de dois triângulos retângulos cuja hipotenusa é o diâmetro da circunferência (ou seja, mede 2).

Isso porque os ângulos dos vértices A e C estão inscritos na circunferência e, por definição, eles valem a metade do ângulo do arco da circunferência que eles limitam.

Por exemplo. O ângulo C delimita, na circunferência, o arco BD, que vale  $180^\circ$  (metade da circunferência). Portanto, o ângulo C vale  $90^\circ$ . O mesmo raciocínio vale para o ângulo A.

Com isso, a análise feita para um dos triângulos retângulos que compõe o quadrilátero branco é análoga ao outro triângulo. Estudemos o triângulo ABD, desenhado a seguir:



Utilizando relações trigonométricas, pode-se determinar a medida dos segmentos AD e AB. Note que o lado AB é o cateto adjacente ao ângulo x. Logo,

$$\cos x = \frac{AB}{2}$$

$$AB = 2 \cos x$$

De maneira semelhante, o lado AD é o cateto oposto ao ângulo x. Portanto,

$$\sin x = \frac{AD}{2}$$

$$AD = 2 \sin x$$

Sabe-se que a área do triângulo nada mais é do que a metade do produto da base pela altura. No caso de triângulos retângulos, a área é simplesmente o produto dos catetos dividido por dois, o que resulta em:

$$A_2 = \frac{AB \times AD}{2}$$

$$A_2 = \frac{2 \cos x \times 2 \sin x}{2}$$

$$A_2 = \frac{4 \cos x \sin x}{2}$$

$$A_2 = 2 \cos x \sin x$$

$$A_2 = \sin(2x)$$

Conforme mencionado anteriormente, pode-se estudar o triângulo retângulo CDB de modo análogo ao desenvolvido para o triângulo retângulo ABD, concluindo que sua área vale:

$$A_3 = \sin(2y)$$

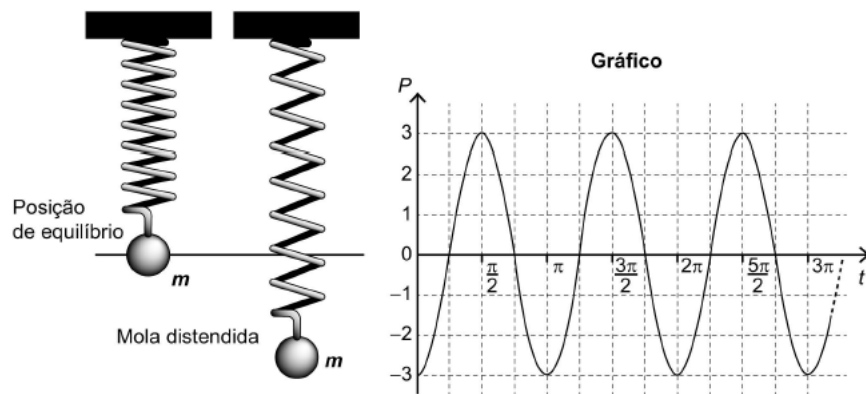
Logo, para calcular a região cinza, basta fazer a conta a seguir:

$$A_{cinza} = A_1 - A_2 - A_3$$

$$A_{cinza} = \pi - \sin(2x) - \sin(2y)$$

Isso está afirmado na **alternativa (b)**.

7. (ENEM 2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição  $P$  (em cm) da massa  $m$  em função do tempo  $t$  (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo  $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$  ou  $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$ , em que  $A > 0$  é a amplitude de deslocamento máximo e  $\omega$  é a frequência, que se relaciona com o período  $T$  pela fórmula  $\omega = 2\pi/T$ . Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições  $P(t)$  da massa  $m$ , ao longo do tempo, no gráfico, é

- (a)  $-3 \cos(2t)$
- (b)  $-3 \sin(2t)$
- (c)  $3 \cos(2t)$
- (d)  $-6 \cos(2t)$
- (e)  $6 \sin(2t)$

**Resolução:** (por Lucas Lopes) A título de conhecimento, este exercício mostra o que, na Física, é chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS). Trata-se do estudo do movimento periódico de objetos, como a mola do sistema proposto no enunciado.

Matematicamente falando, este tipo de movimento pode ser expresso como uma função seno ou uma função cosseno. Quem estiver mais habituado, pode identificar, visualmente, que o gráfico dado do movimento é uma “cossenoide” ou um gráfico da função cosseno. Pode-se chegar a esta conclusão da seguinte maneira:

Note que,

$$P(0) = -3$$

Supondo que o movimento analisado é do tipo “seno”, tem-se:

$$P(t) = A \sin(\omega t)$$
$$P(0) = A \sin 0 = 0.$$

Como esta conclusão não é possível para a situação estudada neste exercício, é possível concluir que o movimento analisado é do tipo “cosseno”. Portanto,

$$P(t) = A \cos(\omega t)$$
$$P(0) = A \cos 0$$
$$P(0) = A \cdot 1 = A$$
$$-3 = A.$$

Logo, a expressão algébrica que representa o gráfico dado é do tipo:

$$P(t) = -3 \cos(\omega t)$$

Analisando as alternativas dadas, a única possibilidade é:

$$P(t) = -3 \cos(2t)$$

Conforme o que está escrito na **alternativa (a)**.

8. (OBJETIVA 2022) Sabendo-se que a medida do cateto adjacente ao ângulo de  $30^\circ$  de certo triângulo retângulo é igual a 6cm, assinalar a alternativa que apresenta a medida da hipotenusa desse triângulo:
- (a) 12cm
  - (b)  $6\sqrt{3}$ cm
  - (c) 10cm
  - (d)  $4\sqrt{3}$ cm

**Resolução:** (por Tiago Alves) Temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

De acordo com a questão, o ângulo é de  $\theta = 30$ , e o cateto adjacente mede 6 cm. Substituindo essas informações na equação acima, obtemos

$$\cos(30) = \frac{6 \text{ cm}}{\text{hipotenusa}},$$

onde  $\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Logo,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 \text{ cm}}{\text{hipotenusa}}.$$

Isolando a hipotenusa:

$$\text{hipotenusa} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 6\text{cm} = \frac{12}{\sqrt{3}}\text{cm}.$$

Multiplicando e dividindo a equação por  $\sqrt{3}$ , podemos simplificar a expressão:

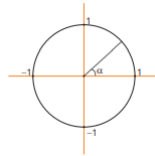
$$\text{hipotenusa} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$\text{hipotenusa} = \frac{12}{3} \times \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{hipotenusa} = 4\sqrt{3} \text{ cm},$$

**alternativa (d).**

9. (UERJ 2022) Observe o ângulo central  $\alpha$  do círculo trigonométrico a seguir:



Admitindo que  $0 \leq \alpha < \pi/2$  e  $\cos \alpha = 4/5$ , o valor de  $\sin(2\pi - \alpha)$  é igual a:

- (a)  $3/5$
- (b)  $1/2$
- (c)  $-3/5$
- (d)  $-1/2$

**Resolução:** (por Tiago Alves) Sabe-se, através da relação fundamental trigonométrica, que:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \quad (1)$$

De acordo com o enunciado da questão,  $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ . Portanto, a equação (1) fica:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

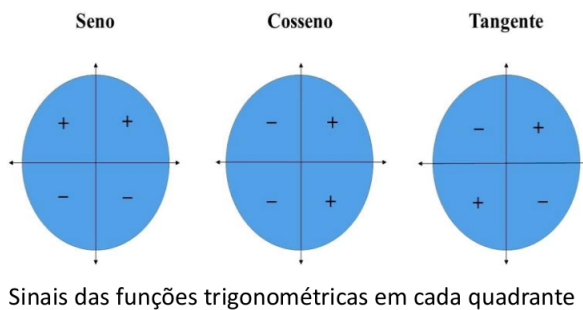
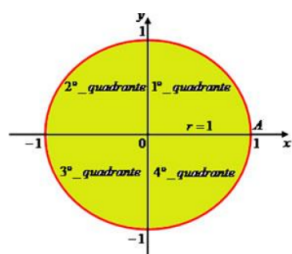
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

De acordo com o enunciado,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  (em graus:  $0 \leq \alpha \leq 90$ ). Ou seja,  $\alpha$  está no primeiro quadrante. Isso implica que o seno é positivo. Logo:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$





A questão pergunta qual o valor de  $\sin(2\pi - \alpha)$ . Para isso, podemos usar a relação trigonométrica:

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A.$$

Portanto,

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(2\pi) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(2\pi). \quad (2)$$

Mas como

$$\sin(2\pi) = \sin(360) = 0$$

$$\cos(2\pi) = \cos(360) = 1,$$

a equação (2) fica:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

Como  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , temos

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\frac{3}{5},$$

**alternativa (c).**

10. (ENEM 2022) Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 6
- (d) 12
- (e) 24

**Resolução:** (por Tiago Alves) Para resolvermos essa questão, precisamos calcular o volume total de 50 docinhos esféricos de 2cm de diâmetro e depois o volume total de 150 docinhos com 4cm de diâmetro, após fazermos isso basta dividirmos um volume pelo outro para obter quantas porções de receita-base a cozinheira deve preparar.

**Cálculo do volume de 50 bolinhos de 2cm de diâmetro:** Como o docinho é esférico podemos calcular seu volume através da fórmula do volume da esfera, que é:

$$V_{1,docinho} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad (3)$$

onde  $R$  é o raio da esfera, e eles estão relacionados com o diâmetro através da expressão  $R = d/2$  (o raio é metade do diâmetro). Como  $d = 2\text{cm}$ , temos  $R = 1\text{cm}$ .

Logo, o volume de um docinho com 2cm de diâmetro é:

$$\begin{aligned} V_{1,docinho,2cm} &= \frac{4}{3}\pi(1)^3 \\ V_{1,docinho,2cm} &= \frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Para descobrirmos o volume total de 50 docinhos de 2cm de diâmetro, basta multiplicarmos o valor do volume de 1 docinho por 50, ou seja:

$$\begin{aligned} V_{50,docinhos,2cm} &= 50V_{1,docinho,2cm} \\ &= 50 \times \left(\frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \frac{200}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned} \quad (4)$$

**Cálculo do volume de 150 docinhos de 4cm de diâmetro:** Como o bolinho tem 4cm de diâmetro, e o raio é metade do diâmetro, então

$$R_{docinho,4cm} = 2\text{cm}$$

Substituindo na fórmula do volume da esfera obtemos

$$\begin{aligned} V_{1,docinho,4cm} &= \frac{4}{3}\pi(2)^3 \\ &= \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Para encontrarmos o volume total de 150 docinhos com 4cm de diâmetro, basta multiplicarmos o volume de um docinho por 150:

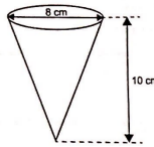
$$\begin{aligned} V_{150,docinhos,4cm} &= 150V_{1,docinho,4cm} \\ &= 150 \times \left(\frac{32}{3}\right) \\ &= \frac{4800}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned} \quad (5)$$

**Cálculo da quantidade de receita base:** Por fim, basta dividirmos a equação (5) pela equação (4) para obtermos a quantidade de receitas base:

$$\begin{aligned} Q_{\text{receita base}} &= \frac{V_{150, \text{docinhos}, 4\text{cm}}}{V_{50, \text{docinhos}, 2\text{cm}}} \\ &= \frac{\frac{4800}{3} \pi}{\frac{200}{3} \pi} \\ &= \frac{4800}{200} \\ &= 24, \end{aligned}$$

alternativa (e).

11. (ENEM 2022) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- (a) 1,52.
- (b) 3,24.
- (c) 3,60.
- (d) 6,48.
- (e) 7,20.

**Resolução:** (por Bruno O.) Primeiramente calcularemos o volume do cone original, utilizando a fórmula para volume de um cone circular:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3},$$

onde  $r$  é o raio da base e  $h$  a altura do cone. Utilizando os valores dados no enunciado, teremos:

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3} = \frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

O novo volume  $V_{\text{novo}}$  deve ser 19% menor que  $V$ , ou seja,

$$\begin{aligned} V_{\text{novo}} &= V - \frac{19}{100}V = \frac{81}{100}V \\ &= \frac{81}{100} \cdot \frac{160\pi}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 27 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \pi}{10 \cdot 10 \cdot 3} \\ &= \frac{27 \cdot 16\pi}{10}. \end{aligned}$$

Seja  $r_{\text{novo}}$  o raio correspondente ao novo cone de chocolate. Pelo enunciado, a altura do novo cone é 10 cm. Podemos utilizar novamente a fórmula de volume de um cone:

$$V_{\text{novo}} = \frac{\pi \cdot r_{\text{novo}}^2 \cdot 10}{3}.$$

Por outro lado, descobrimos o valor de  $V_{\text{novo}}$  na equação anterior. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{27 \cdot 16\pi}{10} &= \frac{\pi \cdot r_{\text{novo}}^2 \cdot 10}{3} \\ \frac{3 \cdot 27 \cdot 16\pi}{10 \cdot \pi \cdot 10} &= r_{\text{novo}}^2 \\ \frac{81 \cdot 16}{10^2} &= r_{\text{novo}}^2 \\ \sqrt{\frac{81 \cdot 16}{10^2}} &= r_{\text{novo}}. \end{aligned}$$

Podemos utilizar que  $81 = 9^2$  e  $16 = 4^2$  para concluir que:

$$r_{\text{novo}} = \frac{9 \cdot 4}{10} = 3,6 \text{ cm},$$

**alternativa (c).**

12. (ENEM 2010) Uma empresa de refrigerantes, que funciona sem interrupções, produz um volume constante de  $1\,800\,000 \text{ cm}^3$  de líquido por dia. A máquina de encher garrafas apresentou um defeito durante 24 horas. O inspetor de produção percebeu que o líquido chegou apenas à altura de 12 cm dos 20 cm previstos em cada garrafa. A parte inferior da garrafa em que foi depositado o líquido tem forma cilíndrica com raio da base de 3 cm. Por questões de higiene, o líquido já engarrafado não será reutilizado.

Utilizando  $\pi \cong 3$ , no período em que a máquina apresentou defeito, aproximadamente quantas garrafas foram utilizadas?

- (a) 555
- (b) 5 555
- (c) 1 333
- (d) 13 333
- (e) 133 333

**Resolução:** Utilizaremos a fórmula de volume de um cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

em que  $r$  é o raio da base e  $h$  a altura. Sabemos que as garrafas possuem  $r = 3$ . O líquido foi depositado até uma altura  $h = 12$  cm. Sendo assim, em cada garrafa haviam

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi \approx 324 \text{ cm}^2$$

de líquido naquele dia. O número de garrafas utilizadas será dado por

$$N = \frac{\text{volume total de líquido produzido}}{\text{líquido por garrafa}} = \frac{1800000}{324} \approx 5555,$$

**alternativa (b).**

## Frente 10: Análise Combinatória

13. (URCA 2022) Após um rigoroso processo seletivo, um grupo formado por 7 homens e 4 mulheres atingiu os requisitos exigidos por uma determinada empresa para fins de contratação. Porém a empresa irá contratar apenas 6 dos 11 candidatos aptos, sendo que, destes 6, pelo menos duas devem ser mulheres. De quantos modos a empresa pode escolher este grupo de 6 pessoas?
- (a) 370
  - (b) 371
  - (c) 455
  - (d) 462
  - (e) 469

**Resolução:** (por Amanda Costa)

Primeiro precisamos entender que a questão se trata de uma combinação, uma vez que a ordem não formariam opções diferentes, então usaremos a fórmula:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Devemos identificar quantos grupos com mulheres conseguimos combinar e avaliar cada possibilidade:

grupo com 2 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 2 e 7 homens e irão escolher 4

$$\begin{aligned} C_4^2 \cdot C_7^4 &= \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \\ &= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{2} \cdot \frac{210}{6} \\ &= 6 \cdot 35 = 210 \end{aligned}$$

grupo com 3 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 3 e 7 homens e irão escolher 3

$$\begin{aligned} C_4^3 \cdot C_7^3 &= \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{7!}{3!4!} \\ &= \frac{4 \cdot 3!}{3!1!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = \frac{4}{1!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \\ &= \frac{4}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4}{1} \cdot \frac{210}{6} \\ &= 4 \cdot 35 = 140 \end{aligned}$$

grupo com 4 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 4 e 7 homens e irão escolher 2

$$\begin{aligned} C_4^4 \cdot C_7^2 &= \frac{4!}{4!0!} \cdot \frac{7!}{2!5!} \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \\ &= 1 \cdot \frac{42}{2} = 21 \end{aligned}$$

Portanto, somando todas as possibilidades  $210 + 140 + 21$  chegamos a 371 possibilidades, alternativa b

14. Cinco rapazes e quatro moças fundaram uma empresa e resolveram que a diretoria da empresa seria composta de cinco sócios dentre os quais pelo menos dois seriam mulheres. Assim, é correto afirmar que o número de maneiras que se pode escolher a diretoria dessa empresa é
- (a) 110.
  - (b) 95.
  - (c) 105.
  - (d) 100.

**Resolução:** (por Amanda Costa)

Primeiro precisamos entender que a questão se trata de uma combinação, uma vez que a ordem não formariam opções diferentes, então usaremos a fórmula:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Devemos identificar quantos grupos com mulheres conseguimos combinar e avaliar cada possibilidade:

Direção com 2 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 2 e 5 homens e irão escolher 3

$$\begin{aligned} C_4^2 \cdot C_5^3 &= \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \\ &= \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 10 = 60 \end{aligned}$$

Direção com 3 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 3 e 5 homens e irão escolher 2

$$\begin{aligned} C_4^3 \cdot C_5^2 &= \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \\ &= \frac{4 \cdot 3!}{3!1!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{4}{1!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \\ &= \frac{4}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 4 \cdot 10 = 40 \end{aligned}$$

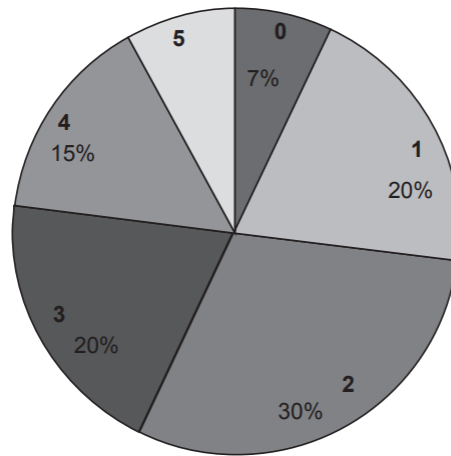
Direção com 4 mulheres: Lembre que neste caso existem 4 mulheres e irão escolher 4 e 5 homens e irão escolher 1

$$\begin{aligned} C_4^4 \cdot C_5^1 &= \frac{4!}{4!0!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \\ &= \frac{4!}{4!0!} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{4!1!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{5}{1!} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{1} = 1 \cdot 5 = 5 \end{aligned}$$

Portanto, somando todas as possibilidades  $60 + 40 + 5$  chegamos a 105 possibilidades, alternativa c.

15. (UFMG 2013) Uma pesquisa em um segmento populacional registrou o número de filhos por mulher. Em uma comunidade, à época da pesquisa, foram consultadas 1 200 mulheres, revelando uma distribuição conforme mostra o gráfico abaixo.

**Distribuição de filhos por mulher**



Observe que o gráfico informa o número de filhos por mulher e a porcentagem correspondente de mulheres com esse número de filhos, exceto na faixa correspondente a 5 filhos. Com essas informações,

- DETERMINE o número de mulheres entrevistadas com 5 filhos.
- CALCULE a média de filhos por mulher.
- CALCULE a probabilidade de uma mulher, escolhida ao acaso, ter 3 filhos ou mais.

**Resolução:**

- Pelo gráfico, a porcentagem de mulheres entrevistadas com número de filhos entre 0 e 4 é:

$$7\% + 20\% + 30\% + 20\% + 15\% = 92\%.$$

Sendo assim, a porcentagem restante (8%) corresponde à quantidade de mulheres com 5 filhos. Como o número total de entrevistadas foi 1200, podemos encontrar:

$$\text{número de mulheres com 5 filhos} = 8\% \cdot 1200 = \frac{8}{100} \cdot 1200 = 8 \cdot 12 = 96.$$

- Como há pesos (porcentagens de mulheres) para os dados (número de filhos) da questão, precisamos utilizar uma média ponderada:

$$\begin{aligned} \text{Média} &= 0 \times 7\% + 1 \times 20\% + 2 \times 30\% + 3 \times 20\% + 4 \times 15\% + 5 \times 8\% \\ &= 1 \times \frac{20}{100} + 2 \times \frac{30}{100} + 3 \times \frac{20}{100} + 4 \times \frac{15}{100} + 5 \times \frac{8}{100} \\ &= \frac{20 + 60 + 60 + 60 + 40}{100} \\ &= \frac{240}{100} \\ &= 2,4 \text{ filhos por mulher.} \end{aligned}$$

- A probabilidade de uma mulher ter 3 filhos ou mais é a soma das probabilidades de uma mulher ter 3, 4 e 5 filhos. Ou seja,

$$P = 20\% + 15\% + 8\% = 43\%.$$



16. (UFMG 2011) QUESTÃO 04 Numa brincadeira, um dado, com faces numeradas de 1 a 6, será lançado por Cristiano e, depois, por Ronaldo. Será considerado vencedor aquele que obtiver o maior número como resultado do lançamento. Se, nos dois lançamentos, for obtido o mesmo resultado, ocorrerá empate. Com base nessas informações,
- (a) CALCULE a probabilidade de ocorrer um empate.
- (b) CALCULE a probabilidade de Cristiano ser o vencedor.

**Resolução:** (por Maurício Trindade)

- a) No primeiro lançamento, por Cristiano, o dado poderá apresentar 6 faces possíveis, de 1 a 6.

O mesmo poderá ocorrer no segundo lançamento, por Ronaldo, ou seja, de 1 a 6.

Assim, as combinações possíveis serão 36 (6x6).

Se preferir, embora mais trabalhosos, você pode construir uma tabela de eventos com as combinações possíveis nos dois lançamentos sucessivos:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3)... (6,6)

E verá que o resultado será o mesmo: 36

Para dar empate, as faces devem ser iguais nos primeiro e segundo lançamentos. Logo, temos 6 maneiras possíveis para isso acontecer:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).

**Assim, a probabilidade de ocorrer um empate é de:**

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- b) Construindo a tabela de eventos, é possível verificar que há 6 possibilidades de empate, 15 possibilidades de vitória de Cristiano e 15 de Ronaldo (total = 36).  
Vejam, Cristiano ganha se der: (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4) e (6,5)

**Logo, a probabilidade de Cristiano ser o vencedor é de:**

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

17. (UFMG 2011) Cinco times de futebol, de igual excelência, vão disputar oito edições seguidas de um torneio anual. Considerando essa informação.
- (a) CALCULE a probabilidade de um mesmo time vencer as duas primeiras edições desse torneio.
- (b) CALCULE a probabilidade de não haver vencedores consecutivos durante a realização das oito edições desse torneio (*Será considerado vencedor consecutivo o time que vencer, seguidamente, duas ou mais edições do torneio.*).

**Resolução:** (por Maurício Trindade)

- a) Como os times têm o mesmo desempenho (do enunciado, "igual excelência"), a probabilidade que cada um tem de ganhar uma edição é de  $\frac{1}{5}$ . Assim, o time deverá vencer a primeira edição e a segunda edição.

Logo, a probabilidade de vencer as duas primeiras edições é de:

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \text{ (mesmo que 0,04 ou 4\%)}$$

Observe que, sempre houver a conjunção aditiva "e", ou seja, dois ou mais eventos devem ocorrer de maneira sucessiva (e independente), aplicamos o princípio da multiplicação. Apenas a título de informação, se a questão pedisse a probabilidade de vencer a primeira ou a segunda edição, ou seja, de forma alternativa, aplicaríamos o princípio da adição:  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$  (0,4 ou 40%)

- b) Esse problema tem maior complexidade e envolve análise combinatória. Vejamos um passo a passo para a resolução:
1. Primeiramente, precisamos determinar o número de combinações possíveis de vencedores considerando as 8 edições. Como temos 5 times, esse número é definido por  $5^8$
  2. Agora, vamos determinar o número de combinações possíveis sem que haja vencedores consecutivos ( $a_n$ ). Considere que na primeira edição podemos ter qualquer time como vencedor, ou seja, há 5 possibilidades (n). Para obedecer a essa regra (não ter vencedor consecutivo), na segunda edição somente 4 times poderão ganhar (n-1). O mesmo ocorre para cada edição subsequente e, assim, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$a_n = 5 \times 4^{n-1}$$

E como são 8 edições:

$$a_8 = 5 \times 4^{8-1} = 5 \times 4^7$$

3. Por fim, já temos como calcular a probabilidade, que será determinada pela razão entre o número de resultados possíveis sem que haja vencedores consecutivos (passo 2) e o número de combinações possíveis (passo 1):

$$P = \frac{a_8}{5^8} = \frac{5 \times 4^7}{5^8} = \frac{4^7}{5^7} = \left(\frac{4}{5}\right)^7$$

$$P = (0,8)^7 = 0,2097 = 20,97\%$$

18. (Faap-SP) O sexto termo do desenvolvimento de  $(x + 2)^8$  pelo binômio de Newton é:

- (a)  $48x^3$
- (b)  $10752x^3$
- (c)  $1792x^3$
- (d)  $3584x^3$
- (e)  $112x^3$

**Resolução:** Aplicamos o binômio de Newton:

$$(x + 2)^8 = x^8 + \binom{8}{1}x^7 \cdot 2^1 + \dots + \binom{8}{n-1}x^{8-(n-1)} \cdot 2^{n-1} + \dots + 2^8,$$

em que  $\binom{8}{n-1}x^{8-(n-1)} \cdot 2^{n-1}$  é o  $n$ -ésimo termo do desenvolvimento. Logo, podemos usar  $n = 6$  para encontrar o sexto termo:

$$\binom{8}{6-1}x^{8-(6-1)} \cdot 2^{6-1} = \binom{8}{5}x^3 \cdot 2^5.$$

Usamos a fórmula de combinação:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56.$$

Logo, o sexto termo é:

$$\binom{8}{6-1}x^{8-(6-1)} \cdot 2^{6-1} = \binom{8}{5}x^3 \cdot 2^5 = 56 \cdot x^3 \cdot 2^5 = 56 \cdot x^3 \cdot 32 = 1792x^3,$$

**alternativa (c).**

19. (UFOP) No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição.

Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

**Resolução:** A senha de dona Antônio é da forma 5 \_ \_ , onde \_ representa um algarismo desconhecido. A princípio, dona Antônio pode escolher um entre 10 algarismos para cada uma das três entradas desconhecidas da senha. Porém, precisamos considerar que um dos algarismos é 6. Sendo assim, dividiremos em casos:

1. se o algarismo 6 aparece na segunda entrada:

$$5 \ 6 \ \_ \ \_$$

Lembre-se que os algarismos devem ser distintos, como enunciado. Logo, para a terceira entrada, existem apenas 8 escolhas possíveis (pois o 5 e o 6 já apareceram) e, para a última entrada, 6 opções distintas, uma vez escolhida a terceira entrada. Então existem  $8 \cdot 6 = 48$  possíveis senhas.

2. se o algarismo 6 aparece na terceira entrada:

$$5 \_ 6 \_$$

Então também existem  $8 \cdot 7 = 56$  possíveis senhas.

3. se o algarismo 6 aparece na última entrada:

$$5 \_ \_ 6$$

$8 \cdot 7 = 56$  possíveis senhas.

No total, existem portanto  $56 + 56 + 56 = 168$  possíveis tentativas distintas. O banco, portanto, deveria permitir 168 tentativas para que dona Antônia consiga realizar o saque.

20. (ENEM 2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

- (a)  $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)!}$
- (b)  $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}$
- (c)  $9 \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$
- (d)  $9 \cdot \frac{2!}{(2-2)! \cdot 2!}$
- (e)  $9 \cdot \left( \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} - 1 \right)$

**Resolução:** A restrição dada pelo enunciado é: os dois apartamentos devem estar no mesmo andar e pelo menos um dos quartos deve receber sol pela manhã. Ou seja, de acordo com as informações dadas, a unidade do número de identificação de ambos os apartamentos desejados pode variar de 1 a 6, mas não pode ser 7 ou 8.

Sendo assim, existem 9 andares possíveis e, em cada andar, deve-se escolher 2 entre 6 possíveis apartamentos:

$$\text{número de maneiras diferentes} = 9 \cdot \binom{6}{2} = 9 \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

**alternativa (b).**