SALVAGUARDA

RESOLUÇÃO COMENTADA

SALVAGUARDA
Programa nacional de educação

Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de ***junho***

Resolução comentada da lista de junho – matemática

Frente 2: Funções

1. (Faap-SP) A produção diária x estimada por uma refinaria é dada por $|x - 200.000| \leq 125.000$, em que x é medida em barris de petróleo. Os níveis de produção x são tais que:
   (a) $175.000 \leq x \leq 225.000$
   (b) $75.000 \leq x \leq 125.000$
   (c) $75.000 \leq x \leq 325.000$
   (d) $125.000 \leq x \leq 200.000$
   (e) $x \leq 125.000$ ou $x \geq 200.000$

Resolução: (por Lucas L.) Ao utilizar Módulo, seja em equações ou inequações, o interesse é em estudar o valor absoluto do número. Em outras palavras, quanto ele vale sem o sinal de negativo, quando houver. Analisando a inequação modular abaixo, por exemplo:

$$|x - 200.000| \leq 125.000$$

Note que dois conjuntos de valores x tornam a inequação acima verdadeira. O primeiro conjunto (I) é aquele "sem o módulo". Ou seja, quando os valores são, de fato, menores ou iguais a 125.000. Isso resulta em:

$$x - 200.000 \leq 125.000$$

Resolvendo a inequação acima, chega-se a:

$$x \leq 125.000 + 200.000$$
$$x \leq 325.000 \qquad (I).$$

O segundo conjunto (II) é aquele "com os sinais invertidos". Em outras palavras, os valores são menores ou iguais a 125.000 em módulo. Ou seja, possuem o sinal negativo. Por tanto, para encontrar seu valor, deve-se inverter o sinal de um dos membros da desigualdade, incluindo o próprio sinal da desigualdade. Isso resulta em:

$$x - 200.000 \geq -125.000$$

Resolvendo a inequação acima, chega-se a:

$$x \geq -125.000 + 200.000$$
$$x \geq 75.000 \qquad (II).$$

Fazendo a intersecção dos conjuntos (I) e (II), pode-se concluir que o valor x dos barris de petróleo produzidos são:

$$75.000 \leq x \leq 375.000$$

Ou seja, o nível de produção desta refinaria é entre 75.000 e 325.000 barris de petróleo por dia, o que está afirmado na **Alternativa C**.

2. (UFMG 2011) Um grupo de animais de certa espécie está sendo estudado por veterinários. A cada seis meses, esses animais são submetidos a procedimentos de morfometria e, para tanto, são sedados com certa droga. A quantidade mínima da droga que deve permanecer na corrente sanguínea de cada um desses animais, para mantê-los sedados, é de 20 mg por quilograma de peso corporal. Além disso, a meiavida da droga usada é de 1 hora - isto é, a cada 60 minutos, a quantidade da droga presente na corrente sanguínea de um animal reduz-se à metade.

Sabe-se que a quantidade $q(t)$ da droga presente na corrente sanguínea de cada animal, t minutos após um dado instante inicial, é dada por

$$q(t) = q_0 2^{-kt},$$

em que:

- q_0 é a quantidade de droga presente na corrente sanguínea de cada animal no instante inicial e
- k é uma constante característica da droga e da espécie.

Considere que um dos animais em estudo, que pesa 10 quilogramas, recebe uma dose inicial de 300 mg da droga e que, após 30 minutos, deve receber uma segunda dose. Suponha que, antes dessa dose inicial, não havia qualquer quantidade da droga no organismo do mesmo animal.

Com base nessas informações,

(a) CALCULE a quantidade da droga presente no organismo desse animal imediatamente antes de se aplicar a segunda dose.

(b) CALCULE a quantidade mínima da droga que esse animal deve receber, como segunda dose, a fim de ele permanecer sedado por, pelo menos, mais 30 minutos.

Resolução: (por Lucas L.)

A função proposta neste exercício é do tipo exponencial e dada pela seguinte expressão:

$$q(t) = q_0 2^{-kt}$$

O enunciado cita que o tempo de meia vida para esta droga é de 60 minutos. Com isso, pode-se escrever uma expressão para o instante t=60, a saber:

$$q(60) = q_0 2^{-60t}$$

Mas, por definição, q(60) vale metade da dose inicial q_0. Logo, a expressão fica:

$$\frac{q_0}{2} = q_0 2^{-60t}$$

Realizando operações de modo a isolar o parâmetro k, chega-se à seguinte equação exponencial:

$$\frac{q_0}{2q_0} = 2^{-60t}$$
$$\frac{1}{2} = 2^{-60t}$$
$$2^{-1} = 2^{-60t}$$

Como as bases são iguais em ambos os lados da equação exponencial, e por toda função exponencial ser bijetora, seus exponentes devem ser iguais, o que resulta no seguinte:

$$-1 = -60t$$
$$60k = 1$$
$$t = \frac{1}{60}$$

Portanto, a função a ser utilizada para calcular o solicitado nos itens a seguir é:

$$q(t) = q_0 2^{-t/60}$$

(a) Para determinar a quantidade de droga presente no organismo deste animal imediatamente antes da aplicação da segunda dose, sabe-se que:

- q_0, neste caso, vale 300mg;
- t, neste caso, vale 30 minutos;

Aplicando estes valores na função exponencial encontrada anteriormente, obtém-se:

$$q(30) = 300 \times 2^{-30/60}$$

Resolvendo a equação, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} q(30) &= 300 \times 2^{-1/2} \\ &= 300 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 300 \times \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 300 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{300}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Racionalizando o resultado encontrado, chega-se a:

$$q(30) = \frac{300\sqrt{2}}{2}\ mg$$

Portanto, imediatamente antes da segunda dose, há $150\sqrt{2}$ mg da droga presente em seu organismo.

(b) O enunciado informa que esta droga será capaz de sedar o animal se a quantidade dela na corrente sanguínea for igual a 20mg a cada 1kg de massa do animal em questão Como o animal tratado neste problema possuí 10kg, a quantidade de droga que ele deverá ter no sangue para permanecer sedado será:

$$q(10) = 10 \times 20 = 200\ mg$$

Em outras palavras, para que o animal fique sedado por mais 30 minutos, a quantidade de droga em seu organismo deve ser de 200mg. Aplicando-se tal informação na função exponencial deste exercício, chega-se a:

$$\begin{aligned} &200 = q_0 2^{-30/60} \\ &200 = q_0 2^{-1/2} \\ &\frac{200}{2^{-1/2}} = q_0 \\ &200 \times 2^{1/2} = q_0 \\ &q_0 = 200 \times \sqrt{2}\ mg \end{aligned}$$

Porém, já há $150\sqrt{2}$ mg da droga presente no organismo do animal. Portanto, a quantidade mínima de droga que ele deve receber na segunda dose vale:

$$q = 200\sqrt{2} - 150\sqrt{2} = 50\sqrt{2}\ mg$$

3. (FUVEST 2016) Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão (Errata: a expressão foi

corrigida, pois estava errada no enunciado da lista):

$$S = \frac{1}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{1}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{1}{10 \cdot \log_7 2016}.$$

O valor de S é

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{5}$

(d) $\frac{1}{7}$

(e) $\frac{1}{10}$

Resolução: (por Lucas L.) Seja a expressão logarítmica abaixo:

$$S = \frac{1}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{1}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{1}{10 \cdot \log_7 2016}$$

Aplicando-se a propriedade de logaritmo de potência, tem-se:

$$S = \frac{1}{\log_2 2016^2} + \frac{1}{\log_3 2016^5} + \frac{1}{\log_7 2016^{10}}.$$

Mudando a base dos logaritmos para 2016, chega-se a:

$$S = \frac{1}{\frac{\log_{2016} 2016^2}{\log_{2016} 2}} + \frac{1}{\frac{\log_{2016} 2016^5}{\log_{2016} 3}} + \frac{1}{\frac{\log_{2016} 2016^{10}}{\log_{2016} 7}}.$$

Desenvolvendo a expressão, é possível obter:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\frac{2}{\log_{2016} 2}} + \frac{1}{\frac{5}{\log_{2016} 3}} + \frac{1}{\frac{10}{\log_{2016} 7}} \\ S &= \frac{\log_{2016} 2}{2} + \frac{\log_{2016} 3}{5} + \frac{\log_{2016} 7}{10} \\ S &= \frac{5 \cdot \log_{2016} 2 + 2 \cdot \log_{2016} 3 + \log_{2016} 7}{10} \end{aligned}$$

Aplicando-se a propriedade de logaritmo de potência, tem-se:

$$S = \frac{\log_{2016} 2^5 + \log_{2016} 3^2 + \log_{2016} 7}{10}$$

Aplicando-se a propriedade de soma de logaritmos, resulta em:

$$S = \frac{1}{10} \log_{2016}(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = \frac{1}{10} \log_{2016}(2016) = \frac{1}{10}.$$

Este é o resultado apontado na **Alternativa (e)**.

4. (ENEM 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

(a) 22
(b) 50
(c) 100
(d) 200
(e) 400

Resolução: (por Lucas L.) Pode-se encarar este exercício como uma espécie de “perda por juros compostos”. Assim sendo, será aplicada a fórmula tradicional de juros compostos, a saber:

$$M = C(1+i)^t$$

Onde M é o montante, C é o capital inicial, i é a taxa de juros e t o tempo do investimento.

Para este exercício, o Montante (M) vai ser a temperatura final desejada de 30°C. O Capital Inicial (C) será a temperatura inicial da liga metálica ao sair do forno, que vale 3000°C. A taxa de juros (i) valerá 1% a cada 30 minutos. Como se trata de um resfriamento, ou seja, uma perda de temperatura, ela terá sinal negativo e poderá ser escrita como -0,01 Aplicando-se tais valores na fórmula de juros compostos, obtém-se:

$$30 = 3000 \times (1-0,01)^t$$

Fazendo operações para isolar a variável t, chega-se a:

$$\begin{aligned} 30 &= 3000 \times 0,99^t \\ \frac{30}{3000} &= 0,99^t \\ \frac{1}{100} &= 0,99^t \\ \frac{1}{100} &= (9 \cdot 0,11)^t \\ 10^{-2} &= (9 \cdot 11 \cdot 10^{-2})^t \end{aligned}$$

Aplicando-se logaritmo na base 10 de ambos os lados, calcula-se:

$$\log 10^{-2} = \log\big(9 \cdot 11 \cdot 10^{-2}\big)$$

Pela propriedade de logaritmo de potência, a expressão acima é equivalente a:

$$\log 10^{-2} = t \cdot \log\big(9 \cdot 11 \cdot 10^{-2}\big)$$

Utilizando a propriedade do logaritmo do produto, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \log 10^{-2} &= t \log 3^2 + t \log 11 + t \log 10^{-2} \\ \log 10^{-2} &= 2t \log 3 + t \log 11 - 2t \log 10, \end{aligned}$$

Consultando as aproximações fornecidas pelo enunciado e calculando os logaritmos mais simples, é possível escrever a seguinte equação de 1° grau:

$$\begin{aligned} -2 &= 2t \cdot 0,477 + t \cdot 1,041 - 2t \\ -2 &= 0,954t + 1,041t - 2t \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação, chega-se à seguinte solução:

$$\begin{aligned}
&-2 = 1,995t - 2t \\
&-2 = -0,005t \\
&0,005t = 2 \\
&5t = 2000 \\
&t = \frac{2000}{5} = 400 \text{ meia horas}
\end{aligned}$$

ATENÇÃO: Lembre-se que este t está expresso em intervalos de meia hora cada um, uma vez que se definiu a taxa de resfriamento i como 1% a cada meia hora! Com isso, o tempo total, em horas, para o resfriamento desta liga metálica até 30°C vale:

$$t_h = \frac{t}{2} = 400/2 = 200 \text{ horas}$$

Este é o resultado apontado na **Alternativa (d)**.

5. (EsPCEx) A quantidade de números inteiros ímpares que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação exponencial a seguir é de:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4$$

(a) um número ímpar.
(b) dois números ímpares.
(c) três números ímpares.
(d) quatro números ímpares
(e) cinco números ímpares.

Resolução: (por Amanda C.) É possível identificar que esta questão se trata de uma **equação do segundo grau**. As equações do segundo grau são representadas por $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são os coeficientes da equação. Para encontrar as raízes dessas equações, devemos utilizar a **fórmula de Bhaskara**, que é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. O primeiro passo é tornar os dois lados da inequação semelhantes, para que possamos compara-los, então podemos re-escrever o 4 como uma potência de base $\frac{1}{2}$, onde

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Temos a seguinte inequação:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Como as bases são iguais, trabalhamos nos índices:

$$x^2 - 8x + 5 > -2$$

Para encontrar as raízes a inequação deve ser maior que zero:

$$x^2 - 8x + 7 > 0$$

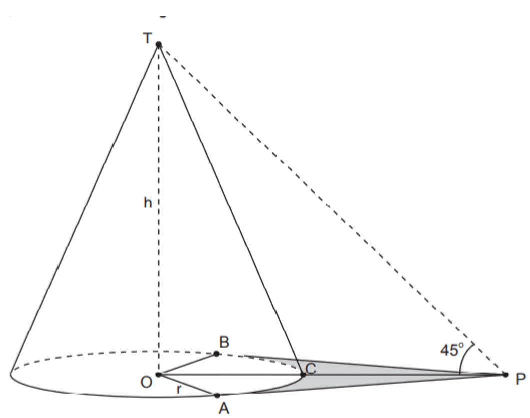
Os coeficientes são a = 1, b = -8, c = 7. As **raízes da equação** são:

$$\begin{aligned}
&\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 36 \\
&x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2} \\
&x = \frac{8 \pm 6}{2} \\
&x' = \frac{8+6}{2} = 7 \\
&x'' = \frac{8-6}{2} = 1
\end{aligned}$$

No intervalo (1, 7), a quantidade de números ímpares que satisfazem a inequação é 2 (3 e 5). Portanto, a resposta correta é a **alternativa (b)**.

Frente 3: Geometria Plana

6. (UFMG 2013) Um cone circular reto de raio $r = \sqrt{3}$ e altura $h = 2\sqrt{3}$ é iluminado pelo sol a um ângulo de 45°, como ilustrado a seguir.



A sombra projetada pelo cone é delimitada pelos segmentos PA e PB, tangentes ao círculo da base do cone nos pontos A e B, respectivamente.

Com base nessas informações,

(a) DETERMINE a distância de P ao centro O do círculo.

(b) DETERMINE o ângulo AOB.

(c) DETERMINE a área da sombra projetada pelo cone.

Resolução: (por Lucas L.)

(a) O desenho do enunciado mostra que a altura do cone (h) e a distância entre P e o centro O do círculo (PO) formam os catetos de um triângulo retângulo isósceles, com ângulos internos valendo 90°, 45° e 45. Desta forma, valem todas as relações trigonométricas conhecidas, especialmente a tangente, definida em um triângulo retângulo com a seguinte relação:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Adotando θ=45°, como mostrado na figura, tem-se:

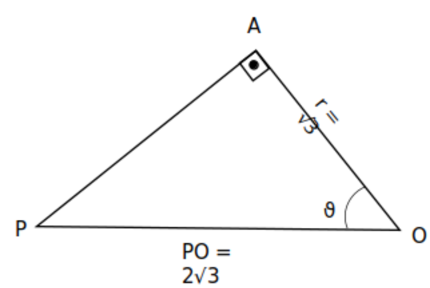
$$\tan 45 = \frac{h}{PO}$$

Como $\tan 45 = 1$ e $h = 2\sqrt{3}$, chega-se a:

$$1 = \frac{2\sqrt{3}}{PO}$$
$$PO = 2\sqrt{3}$$

Logo, a distância entre os pontos P e O vale $2\sqrt{3}$.

(b) Representando o triângulo OAP, tem-se a seguinte figura:



O fato dos segmentos PA e AO serem perpendiculares ocorre porque PA é parte de uma reta tangente à circunferência de centro O no ponto A. Sabendo-se disso, pode-se aplicar a relação trigonométrica cosseno no triângulo OAP, resultando em:

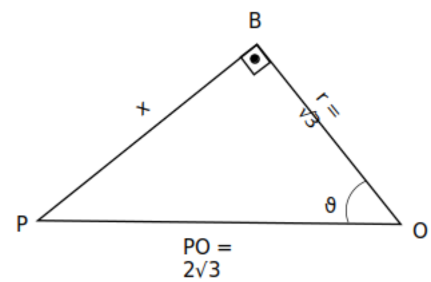
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\theta = \frac{r}{PO}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

O ângulo agudo cujo cosseno vale 0,5 é 60°. Logo, θ=60°. O mesmo cálculo pode ser feito para o triângulo OBP. Com isso, o ângulo AÔB vale:

$$AOB = 2\theta = 120$$

(c) A área da sombra projetada pelo cone nada mais é do que a soma das áreas dos triângulos OAP e OBP, descontada a área do setor circular AOB.

Pela situação apresentada pelo enunciado, é possível provar que os triângulos OAP e OBP são iguais. Representando o triângulo OBP, tem-se a seguinte figura:



Para calcular a área do triângulo acima, faz-se necessário determinar a medida do lado PB (x). Aplicando-se a Fórmula de Pitágoras, tem-se:

$$x^2 + r^2 = PO^2$$
$$x^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$$
$$x^2 + 3 = 4 \cdot 3$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Como x é a medida do lado de um triângulo, a solução negativa da equação acima não convém. Logo, x=3. Calculando a área do triângulo OBP, obtém-se:

$$A_{OBP} = \frac{x \times r}{2} \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Como o triângulo OBP é igual ao triângulo OAP, a soma de suas áreas vale:

$$A_1 = A_{OBP} + A_{OAP}$$
$$A_1 = 2 \times A_{OBP}$$
$$A_1 = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$A_1 = 3\sqrt{3}$$

Dado que o ângulo do setor circular AOB vale 120º, ele representa a seguinte fração da circunferência total:

$$y = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

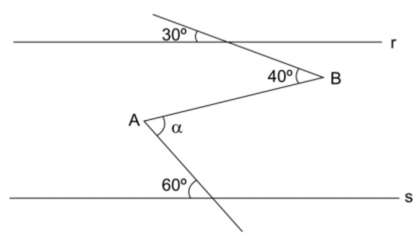
Portanto, a área do setor AOB vale um terço da área total do círculo, o que equivale a:

$$A_2 = \frac{1}{3}A_o$$
$$A_2 = \frac{1}{3}\pi r^2$$
$$A_2 = \frac{\pi r^2}{3}$$
$$A_2 = \frac{\pi \cdot (\sqrt{3})^2}{3}$$
$$A_2 = \frac{3\pi}{3} = \pi$$

Portanto, a área da sombra projetada pelo cone vale:

$$A_{\text{total}} = A_1 - A_2 = 3\sqrt{3} - \pi$$

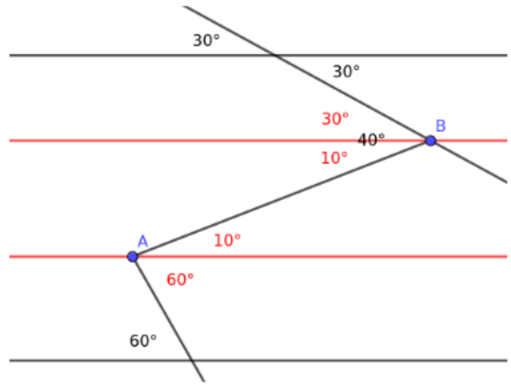
7. (FGV 2004) Na figura, os pontos A e B estão no mesmo plano que contém as retas paralelas r e s.



Assinale o valor de α:

(a) 30°
(b) 50°
(c) 40°
(d) 70°
(e) 60°

Resolução: (por Amanda C.) Vamos usar os ângulos entre as paralelas, logo 30º será oposto pelo vértice que também é 30º. Traçamos duas paralelas nos pontos B e A. Usando a regra de alternos internos entre a reta r e a nova reta traçada no ponto B identificamos que a parte superior da mesma é 30º, consequentemente a parte inferior deve ser 10º para que se mantenha o total de 40º. Agora olhando para a reta traçada no ponto A podemos chegar a conclusão que a parte superior mede 10º por ser alterno interno em relação a reta traçada em B. Para identificar a parte inferior da reta traçada em A percebemos que é alterno interno aos 60º na reta s.

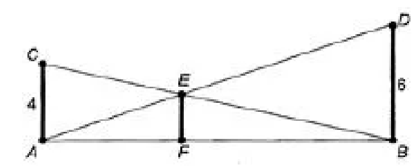


Logo após de termos identificado partes do mesmo ângulo realizamos a soma para identificar o total:

$$\alpha = 10 + 60 = 70$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa (d)**.

8. (ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

(a) 1 m

(b) 2 m

(c) 2.4 m

(d) 3 m

(e) 2.6 m

Resolução: (por Amanda C.)

Os triângulos **FEB e ACB** são semelhantes por apresentarem **ângulos congruentes entre si**, portanto $\frac{EF}{AC} = \frac{FB}{AB}$, como $AC = 4$, $\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB}$.

Os triângulos FEA e BDA **também são semelhantes pela mesma razão**, assim, $\frac{EF}{BD} = \frac{FE}{AB}$, como $BD = 6$, $\frac{EF}{6} = \frac{FE}{AB}$.

Então, finalizando **todas as equações achadas a partir das semelhanças**, sabemos que $\frac{EF}{4} + \frac{EF}{6}$.

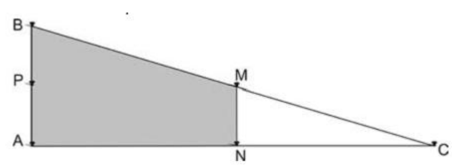
Como $FB + FE = AB$, $\frac{EF}{4} + \frac{EF}{6} = 1$;

$\frac{5}{12}EF = 1$

$EF = \frac{12}{5} = 2,4$.

Portanto, a resposta correta é a alternativa **c.**

9. (ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



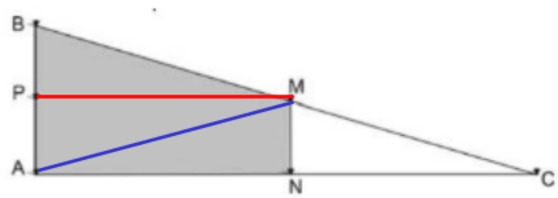
A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

(a) à mesma área do triângulo AMC.
(b) à mesma área do triângulo BNC.
(c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
(d) ao dobro da área do triângulo MNC.
(e) ao triplo da área do triângulo MNC.

Resolução: (por Bruno O.) Como

$$MC = BC/2, \qquad NC = AC/2,$$

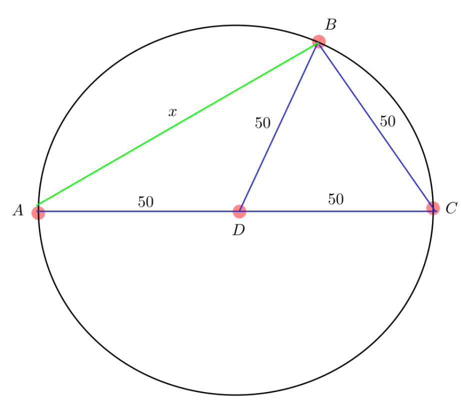
podemos concluir, pelo critério Lado-Lado-Ângulo, que os triângulos ABC e NMC são semelhantes. Portanto, MNC é também retângulo. Por argumentos semelhantes, o triângulo APM é também retângulo.



Notamos que os triângulos APM, MNA, MNC e PBM têm a mesma área, pois possuem mesmo comprimento de base e altura. Logo, a área a ser calçada tem o triplo da área do triângulo MNC, **alternativa (e)**.

10. (UFES 2000) (Ufes 2000) Quatro pequenas cidades A, B, C e D estão situadas em uma planície. A cidade D dista igualmente 50km das cidades A, B e C. Se a cidade C dista 100km da cidade A e 50km da cidade B, qual dos valores abaixo melhor representa a distância da cidade A à cidade B?
    (a) 86,6 km
    (b) 88,2 km
    (c) 89,0 km
    (d) 92,2 km
    (e) 100,0 km

Resolução: (por Bruno O.) A cidade D dista 50km de A, B e C. Podemos traçar uma circunferência de raio 50km, cujo centro é D, tal que as cidades A, B e C estão localizadas sobre a circunferência, como na figura:



O segmento AC corresponde a um diâmetro da circunferência, já que A dista 100km de C. O triângulo ABC está inscrito na semicircunferência superior e, portanto, é um triângulo retângulo (confira https://www.matematica.pt/geogebra/9-ano-angulo-inscrito-2.php).

Utilizamos o Teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento do segmento $x = AB$:

$$
\begin{aligned}
&(AC)^2 = (BC)^2 + x^2\\
&100^2 = 50^2 + x^2\\
&10000 - 2500 = x^2\\
&\sqrt{7500} = x\\
&\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^4} = x\\
&2 \cdot 25\sqrt{3} = x
\end{aligned}
$$

Logo

$$x = 50\sqrt{3} \approx 86,6$$

utilizando a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$, **alternativa (a)**.

Frentes 4 e 5: Matrizes e Determinantes; Sistemas Lineares

11. (UNICAMP 2014) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix},$$

onde a e b são números reais e distintos. Podemos afirmar que

(a) a matriz M não é invertível

(b) o determinante de M é positivo.

(c) o determinante de M é igual a $a^2 - b^2$.

(d) a matriz M é igual à sua transposta.

Resolução: (por Maurício T.)

IMPORTANTE SABER:

1º) Uma matriz será **invertível** apenas quando o seu **determinante** for **diferente de zero**.

2º) A matriz **transposta** é aquela obtida quando **trocamos as linhas pelas colunas**, ou seja, linhas viram colunas e colunas viram linhas.

COMO CALCULAR O DETERMINANTE: Lembre-se que um dos métodos é duplicar as duas primeiras colunas e multiplicar os termos de forma cruzada, como ilustrado (azul: sinal positivo; laranja: sinal negativo)

$$Det\ M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

$= (1.1.1) + (a.a.1) + (1.b.b) - (1.1.1) - (1.a.b) - (a.b.1)$

$= 1 + a^2 + b^2 - 1 - ab - ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

Assim, temos o seguinte binômio (quadrado da diferença):

$= (a - b)^2$

Com esse resultado, já sabemos que a resposta é "b", pois esse binômio será **SEMPRE POSITIVO**, para qualquer número "a" e "b", pois, de acordo com o enunciado, são números reais e distintos.

E, apenas para reforçar a compreensão sobre a matriz, vamos eliminar as outras alternativas:

a) A matriz M é invertível, pois $Det\ M \neq 0$ (lembrando que "a" e "b" são reais e distintos, temos que a subtração deles nunca será igual a zero)

b) RESPOSTA CORRETA

c) $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$

d) $M^t = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} = M$

12. (UNICAMP 2014) Considere a matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a, b e c são números reais.

(a) Encontre os valores de a, b, c de modo que $A^t = -A$.

(b) Dados $a = 1$ e $b = -1$, para que valores de c e d o sistema linear

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$$

tem infinitas soluções?

Resolução: (por Bruno O.)

(a) Calculamos

$$A^t = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \qquad -A = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -b \\ -c & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para a igualdade $A^t = -A$ ser válida, precisamos que

$$\begin{aligned} -a = a &\implies a = 0, \\ -b = -2 &\implies b = 2, \\ c = -1. \end{aligned}$$

(b) Para os valores dados de $a = 1$ e $b = -1$, o sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d, \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - z = 1 \\ cx - 2y = d. \end{cases}$$

Para que o sistema tenha infinitas soluções, uma das equações deve depender linearmente das outras duas. Por exemplo, se somarmos a primeira com a segunda, obtemos

$$y = 2.$$

Dessa forma, se $c = 0$ e $-2y = d \implies -2 \cdot 2 = d$, a terceira equação se torna a soma das duas primeiras. A resposta é, portanto,

$$c = 0, \qquad d = -4.$$

(confira também: https://www.youtube.com/watch?v=cNsgcY01zDg)

13. (FUVEST 2012) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

em que a é um número real. Sabendo que A admite inversa A^{-1} cuja primeira coluna é

$$\begin{pmatrix} 2a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é igual a

(a) 5

(b) 6

(c) 7
(d) 8
(e) 9

Resolução: As informações do enunciado nos permitem escrever a igualdade:

$$AA^{-1} = Id \qquad \text{ou}$$
$$\begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde x e y são as duas entradas desconhecidas da matrix inversa A^{-1}. Por outro lado, podemos realizar a multiplicação das matrizes A e A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(2a-1)-(2a+1) & ax+y(2a+1) \\ (a-1)(2a-1)-(a+1) & x(a-1)+y(a+1) \end{pmatrix}$$

Igualando ambos os resultados das equações acima, temos um sistema:

$$\begin{cases} a(2a-1)-(2a+1) = 1 \\ ax+y(2a+1) = 0 \\ (a-1)(2a-1)-(a+1) = 0 \\ x(a-1)+y(a+1) = 1 \end{cases}$$

cuja solução é: $a = 2$, $x = -5$ e $y = 2$. Logo, a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é

$$2a - 1 + y = 2 \cdot 2 - 1 + 2 = 5,$$

alternativa (a).

14. (ENEM 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

(a) 34
(b) 42
(c) 47
(d) 48
(e) 79

Resolução: (por Davi M.) Sejam x e y as quantidades de alunos que compraram respectivamente 1 bilhete e 3 bilhetes da rifa. O total de alunos da escola é $t = 80 + x + 45 + y$, porque 80 não foram a festa (e não compraram bilhetes), x e y estão especificados acima e 45 compraram 2 bilhetes. A quantidade de bilhetes comprados foi

$$0 \times 80 + 1 \times x + 2 \times 45 + 3 \times y = 90 + x + 3y$$

Sabemos que essa quantidade excedeu t em 33. Portanto:

$$x + 3y + 90 = 80 + x + 45 + y + 33$$
$$2y = 68$$
$$y = 34$$

Então, a quantidade de bilhetes comprados foi $x + 3 * 34 + 90 = x + 192$. Sabemos que 20% (ou um quinto) dessa quantidade é igual a x (quantidade de alunos que compraram um bilhete). Portanto:

$$\frac{x + 192}{5} = x$$
$$4x = 192$$
$$x = 48$$

Alternativa (d).

15. (ENEM 2013) Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a urna demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada.

    A quantidade X, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

    (a) N/9
    (b) N/6
    (c) N/3
    (d) 3N
    (e) 9N

Resolução: (por Davi M.)

$$S = N y^2$$
$$S = X(3y)^2 = 9Xy^2$$
$$9Xy^2 = Ny^2$$
$$X = \frac{N}{9}$$

Alternativa (a).

16. (FUVEST) O determinante da inversa da matriz a seguir é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1/5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) $-52/5$
(b) $-48/5$
(c) $-5/48$
(d) $5/52$
(e) $5/48$

Resolução: (por Davi M.) O determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz. O determinante da matriz dada é:

$$-6-4+\frac{2}{5}=\frac{-50+2}{5}=-\frac{48}{5}$$

Determinante da matriz inversa: $-\frac{5}{48}$. **Alternativa (c)**.

17. (Fuvest 2012) Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a
(a) 100
(b) 105
(c) 115
(d) 130
(e) 135

Resolução: (por Davi M.)

Sejam h e m as quantidades de homens e mulheres respectivamente. Portanto,

$$n = h + m$$

A saída de 31 mulheres faz a quantidade remanescente de mulheres na festa ser a metade do número de homens. Equação 01:

$$m - 31 = \frac{h}{2}$$

A saída de 55 homens faz a quantidade remanescente de homens ser um terço da quantidade de mulheres remanescentes. Equação 02:

$$h - 55 = \frac{m - 31}{3}$$

Substituindo $m - 31$ da primeira equação na segunda se obtém:

$$h - 55 = \frac{h/2}{3}$$

$$h - 55 = \frac{h}{6}$$

$$\frac{5h}{6} = 55$$

$$h = 66$$

Substituindo o valor de h na primeira equação se obtém:

$$m - 31 = \frac{h}{2} = 33$$

$$m = 64$$

$$n = 66 + 64$$

$$n = 130$$

Alternativa (d).

18. (ENEM 2013) Médicos alertam sobre a importância de educar as crianças para terem hábitos alimentares saudáveis. Por exemplo, analisando-se uma bolacha com recheio de chocolate (25 g) e um pé de alface (25 g), observam-se as seguintes quantidades de nutrientes, respectivamente:

- carboidratos: 15 g e 0,5 g;
- proteínas: 1,9 g e 0,5 g.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Considerando as informações apresentadas, qual deve ser o número de pés de alface consumidos para se obter a mesma quantidade de carboidratos de uma bolacha?

(a) 50
(b) 30
(c) 14
(d) 8
(e) 7

Resolução: (por Davi M.) **Alternativa (b)**, porque $30 \times 0,5g = 15g$.

19. (ENEM 2012)

QUESTÃO 178

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução: (por Davi M.)

Como se quer calcular médias de 4 notas como os mesmos pesos, esses precisam ser todos iguais a $\frac{1}{4}$. Isso elimina as opções A, C e D.

Como as notas de cada matérias estão dispostas em linhas, o vetor com os pesos precisa ser um vetor-coluna (4 linhas x 1 coluna). Sendo assim, na multiplicação, cada linha da matriz de notas é multiplicada pelo vetor-coluna com os pesos. O resultado é outro vetor coluna com as médias (cada elemento sendo a média de uma matéria), porque cada elemento de cada linha da matriz é multiplicado por $\frac{1}{4}$ (ou seja, dividido por 4) e os resultados de cada linha são somados. **Letra E**.

20. (UFMG 2013) Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$$

Observando-se que o coeficiente de y na segunda equação é um parâmetro a,

(a) Determine para quais valores de a o sistema tem solução.

(b) Determine as soluções x e y em função do parâmetro a, caso o sistema tenha solução.

(c) Determine todos os valores de a para os quais o sistema tenha como solução números inteiros x e y.

Resolução: (por Davi M.)

a) O determinante da matriz do sistema é $2a-18$.
Para que o determinante seja não nulo e, portanto, o sistema tenha solução, $a \neq 9$.

Outa maneira de chegar a essa conclusão:
Se $a=9$, as retas correspondentes às duas equações do sistema serão paralelas, porque terão o mesmo coeficiente angular: $\frac{-2}{3}=\frac{-6}{9}$. Quando as retas são paralelas, não se cruzam e o sistema correspondente não tem solução.

b) Multiplicando a primeira equação por 3 e subtraindo dela a segunda se obtém:

$$6x+9y-6x-ay=6-3$$

$$(9-a)y=3$$

$$y=\frac{3}{9-a}, a\neq 9$$

(mais uma forma de ver que $a=9$ torna o sistema sem solução, porque é um valor que anula o denominador da fração acima)

Substituindo y na primeira equação se obtém:

$$2x+\frac{9}{9-a}=2$$

$$2x=\frac{-9}{9-a}+2$$

$$x=1-\frac{9}{18-2a},a\neq 9$$

c) Como $y=\frac{3}{9-a}$, para que y seja inteiro, $(9-a)$ precisa ser divisor de 3. Ou seja,

$$\begin{cases}9-a=\pm 1\\ 9-a=\pm 3\end{cases}$$

Portanto, para que y seja inteiro, $a\in\{6,8,10,12\}$.

d) Semelhantemente, para que x seja inteiro, $(18-2a)$ precisa ser divisor de 9. Ou seja,

$$\begin{cases}18-2a=\pm 1\\ 18-2a=\pm 3\\ 18-2a=\pm 9\end{cases}$$

Os valores de a calculados a partir das equações acima são todos fracionários, porque resultam de divisões de ímpares por 2. Portanto, são todos diferentes dos elementos do conjunto especificado acima, $\{6,8,10,12\}$. Então, se conclui que não existem valores de a que tornam x e y simultaneamente inteiros.