SALVAGUARDA

RESOLUÇÃO COMENTADA

SALVAGUARDA
Programa nacional de educação

*Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de **(Inserir aqui o mês)***

Resolução comentada da lista de maio - matemática

Frente 1: Matemática Básica

1. (COLTEC 2023) Uma loja de roupas reajusta, com um mesmo percentual, o preço de todas suas peças ao final de cada ano (esse percentual de reajuste modifica a cada ano). Uma calça que custava R$96,00 no ano de 2018 passou a custar R$100,80 em 2019, e um moletom que custava R$80,00 em 2018 passou a custar R$89,88 em 2020. De acordo com essas informações, é CORRETO afirmar que o reajuste nos preços dos produtos desta loja, de 2019 para 2020, foi de

   (a) 7,00%

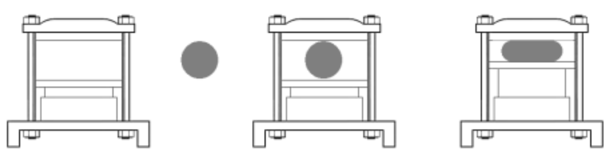
   (b) 5,00%

   (c) 12,35%

   (d) 7,35%

> **Resolução:** (por Davi D'Elia) Calça: $R\$96,00$ em 2018 para $R\$100,80$ em 2019.
>
> Reajuste de 2018 para 2019 $= \dfrac{100,8-96}{96} = \dfrac{4,8}{96} = 0,05 = 5\%$.
>
> Moletom: $R\$80,00$ em 2018 para $R\$89,88$ em 2020.
>
> Moleton passou a custar em 2019: $80(1+5\%) = 84$.
>
> Reajuste de 2019 para 2020 $= \dfrac{89,88-84}{84} = \dfrac{5,88}{84} = 0,07 = 7\%$.
>
> Gabarito: letra (a).

2. (UFMS 2018) Uma nova liga metálica maleável foi desenvolvida pela indústria da construção civil, a fim de obter novos designs. Uma das maneiras de produzir esses novos modelos, a partir de uma barra circular, é colocá-la em uma prensa e comprimi-la, conforme o esquema a seguir:



   Suponha que a parte superior e inferior da prensa sejam perfeitamente paralelas e que as partes curvas da nova barra obtida sejam semicircunferências com a metade do diâmetro da face circular original. Suponha, ainda, que o perímetro permanece inalterado em relação ao círculo original da barra. A razão da área da face comprimida pela área da face circular da barra original é igual a:

   (a) $\frac{5}{4}$

   (b) $\frac{3}{4}$

   (c) $\frac{4}{3}$

   (d) $\frac{2}{3}$

   (e) $\frac{3}{2}$

> **Resolução:** Sendo c o comprimento de cada trecho reta do nova seção e r o raio da seção original, pode-se escrever
>
> $$2\pi r = 2\pi\frac{r}{2} + 2c,$$

pois o perímetro é conservado. Portanto,

$$c = \pi \frac{r}{2}.$$

$$\frac{\text{Área nova}}{\text{Área original}} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + cr}{\pi r^2} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \pi\frac{r^2}{2}}{\pi r^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Gabarito: letra (b).

3. (ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionada para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veiculo, causas freqüentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

   Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

   (a) 300 tijolos,
   (b) 360 tijolos,
   (c) 400 tijolos,
   (d) 480 tijolos,
   (e) 600 tijolos.

Resolução: (por Tiago Alves) O peso máximo que o caminhão consegue carregar pode ser calculado por

$$\text{Peso máximo} = (\text{quantidade de telhas}) \times (\text{peso de cada telha}).$$

A questão diz que o caminhão consegue levar 1500 telhas, podemos então escrever:

$$P_{max} = 1500 P_{\text{telha}}, \tag{1}$$

onde P_{max} é o peso máximo que o caminhão consegue carregar e P_{telha} é o peso de cada telha.

O mesmo irá acontecer para o caso dos tijolos, como o caminhão consegue carregar 1200 tijolos, teremos:

$$P_{max} = 1200 P_{\text{tijolo}}, \tag{2}$$

onde P_{tijolo} é o peso de cada tijolo.

Podemos igualar as expressões (1) e (2) e ficar com:

$$\begin{aligned} 1500 P_{\text{telha}} &= 1200 P_{\text{tijolo}} \\ P_{\text{telha}} &= \frac{1200}{1500} P_{\text{tijolo}} \\ P_{\text{telha}} &= \frac{4}{5} P_{\text{tijolo}}. \end{aligned}$$

Ou seja, cada telha pesa o mesmo que 4/5 de um tijolo.

Considerando que o caminhão esteja carregando 900 telhas, como sua capacidade máxima é de 1500 telhas, ele possui então uma carga livre de 600 telhas (1500-900=600).

Como o peso de cada telha equivale a 4/5 do peso de um tijolo, o peso de 600 telhas será de

$$600P_{\text{telha}} = 600 \times \frac{4}{5}P_{\text{tijolo}}$$
$$600P_{\text{telha}} = 480P_{\text{tijolo}}.$$

Logo o caminhão conseguirá carregar 480 tijolos sem ultrapassar o limite de carga. Resposta: alternativa (d).

4. Uma torneira enche um tanque em 2 horas, e outra, se aberta também sozinha, enche-o em 3 horas. Abertas simultaneamente, quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

Resolução: (por Guilherme Sonego)

1. Primeira Resolução

Neste tipo de exercício uma estratégia interessante que ajuda a evitar confusões é de determinar valores fictícios que se encaixem nos dados do exercício e trabalhar com eles. Por exemplo, temos no exercício a informação de que uma torneira enche um tanque em 2 horas e outra em 3 horas. Não sabemos quantos litros de volume o tanque possui e nem quantos litros por segundo são liberados pelas torneiras, isso é, suas vazões. E de fato não precisamos desses dados, mas podemos criar exemplos particulares para nos orientar.

1.1 Capacidade do tanque e das torneiras: Vamos começar determinando um valor para o tanque. Aqui vale usar valores que nos ajudem. 100 por exemplo possui diversos divisores para facilitar as contas, mas visto que temos 2 e 3 como dados do exercício, vamos usar a capacidade do tanque igual a 12 litros para nos auxiliar nas contas. Dessa forma temos que o tanque terá 12 litros, logo podemos determinar que a primeira torneira encherá 12 litros em 2 horas e a segunda em 3 horas. Logo:

$$\frac{12}{2} = 6\ell/hora$$

$$\frac{12}{3} = 4\ell/hora$$

1.2. Vazões combinadas: Portanto para determinamos o tempo que elas demorarão para encher o tanque juntas podemos somar suas vazões e realizar uma proporção ou regra de três:

$$6\ell/hora + 4\ell/hora = 10\ell/hora$$

Para encher 5 litros as torneiras demoram 1 hora, então para encher 6 litros elas demorarão x horas.

$$10\ell \text{——} 1\,hora$$
$$12\ell \text{——} x\,horas$$
$$10.x = 12$$

$$x = \frac{12}{10}$$
$$x = 1,2\,horas$$
$$x = \frac{12}{10} \cdot 60 = 72\,minutos$$

Logo, juntas, as duas torneiras demorarão 1,2 horas, ou, também, 1 hora e 12 minutos.

2. Método Direto Uma segunda forma de resolvermos envolve uma abordagem mais direta e trabalhando somente com as proporções fornecidas. Para isso iremos determinar a vazão em função do próprio tanque, e não de litros. Basta dividirmos a quantia de tanques enchidos pelo tempo fornecido:

$$\text{Primeira torneira:} \frac{1}{2}\, tanques/hora$$

$$\text{Segunda torneira:} \frac{1}{3}\, tanques/hora$$

Logo, similarmente ao outro método, somaremos as vazões multiplicadas pelo tempo x em horas necessário para encher o número de tanques, nesse caso, somente um:

$$\frac{1x}{2} + \frac{1x}{3} = 1\, tanque$$

$$\frac{3x + 2x}{6} = 1\, tanque$$

$$x = 6/5\, horas = 1,2horas$$

5. (FACAPE 2022) Em um tanque há duas torneiras. Quando somente a primeira é aberta, esse tanque fica totalmente cheia em 4 horas. Quando somente a segunda é aberta, esse tanque enche em 5 horas. Dessa forma, se as duas forem abertas juntas, em quanto tempo encherão completamente, esse mesmo tanque?
   (a) 1 hora e 12 minutos.
   (b) 1 hora e 48 minutos.
   (c) 2 horas.
   (d) 2 horas e 12 minutos.
   (e) 2 horas e 48 minutos.

Resolução: (por Bruno O.) Seja V o volume do tanque. A vazão de cada torneira é definida como o volume de água que escoa através da respectiva torneira por unidade de tempo. Sendo assim, podemos escrever

$$V = 4 \text{ horas } \times (\text{vazão da torneira 1}) \tag{3}$$

e também

$$V = 5 \text{ horas } \times (\text{vazão da torneira 2}). \tag{4}$$

Dividindo a equação (3) pela equação (4), teremos

$$1 = \frac{4}{5} \times \frac{(\text{vazão da torneira 1})}{(\text{vazão da torneira 2})},$$

logo

$$(\text{vazão da torneira 2}) = \frac{4}{5} \times (\text{vazão da torneira 1}),$$

ou

$$v_2 = \frac{4}{5} v_1,$$

onde v_1 = (vazão da torneira 1) e v_2 = (vazão da torneira 2). A vazão total, quando ambas as torneiras estão abertas, é

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = v_1 + \frac{4}{5}v_1 = \frac{9}{4}v_1.$$

Seja t o tempo necessário para encher o tanque completamente com ambas as torneiras abertas. Então

$$V = t \times v_{\text{total}} = t \times \frac{9}{4}v_2. \tag{5}$$

Dividindo equação (4) pela equação (5), teremos, portanto:

$$1 = \frac{5 \times v_2}{t \times \frac{9}{4}v_2} = \frac{5}{t \times \frac{9}{4}}.$$

Por fim:

$$t = \frac{5}{\frac{9}{4}} = \frac{20}{9} = 2.23 \text{ horas } \approx 2 \text{ horas e } 12 \text{ minutos, letra (d).}$$

6. (Cefet-MG) Em uma empresa, 10 funcionários produzem 150 peças em 30 dias úteis. O número de funcionários que a empresa vai precisar para produzir 200 peças, em 20 dias úteis, é igual a
   (a) 18.
   (b) 20.
   (c) 22.
   (d) 24.

Resolução: (por Bruno O.) Podemos utilizar regra de três composta. O primeiro passo é produzirmos uma tabela com as informações dadas:

Funcionários	**Peças**	**Dias**
10	150	30
x	200	20

onde x representa o número de funcionários a ser descoberto. Vamos agora analisar a relação entre as grandezas. A comparação deve ser feita com relação à grandeza que possui uma incógnita. Nesse caso, o número de funcionários.

- Se fixarmos o número de dias, um número maior de peças requer um número maior de funcionários. Portanto, número de funcionários e número de peças são diretamente proporcionais.
- Se fixarmos o número de peças, um número menor de funcionários requer um número maior de dias para a produção. Portanto, número de funcionários e dias são grandezas inversamente proporcionais.

Devemos isolar a fração da incógnita de um lado da equação. Do outro lado da equação, multiplicamos a fração referente à grandeza diretamente proporcional pelo inverso da fração referente à grandeza inversamente proporcional. Ou seja:

$$\frac{10}{x} = \frac{150}{200} \times \frac{20}{30} = \frac{150}{30} \times \frac{20}{200} = \frac{5}{10}.$$

Portanto,

$$5x = 100$$

e $x = 20$. Letra (b).

7. (Unifor) Quinze operários, trabalhando 8 horas por dia, demoram 16 dias para fazer um muro de 80 metros de comprimento. Se a quantidade de operários fosse reduzida para 10, a quantidade de horas, por dia, que precisariam trabalhar para, em 24 dias, fazerem um muro de 90 metros de comprimento, com a mesma espessura e altura que o anterior, é de:
   (a) 6.
   (b) 7.
   (c) 8.
   (d) 9.
   (e) 10.

Resolução: (por Amanda Costa) Nesta questão identificamos que se trata de uma regra de três e por temos mais de duas grandezas é possível identificar ser uma regra de três composta. Para identificarmos cada elemento como diretamente ou inversamente proporcional nos guiaremos com relação ao número de horas, que é o que o enunciado deseja que venhamos a descobrir

Operários	Horas	Dias	Comprimento
15	8	16	80
10	x	24	90

Quando o número de operários cai de 15 para 10, o que deve acontecer com a quantidade de horas para que seja mantido o mesmo prazo de entrega? o número de horas deve aumentar, o que as torna **inversamente** proporcionais.
Quando o número de dias cresce de 16 para 24, o que deve acontecer com a quantidade de horas para que seja mantido o mesmo prazo de entrega? O número de horas deve diminuir, o que as torna **inversamente** proporcionais.
Quando o comprimento cresce de 80cm para 90, o que deve acontecer com a quantidade de horas para que seja mantido o mesmo prazo de entrega? o número de horas deve aumentar também, o que as torna **diretamente** proporcionais.

Agora vamos organizar as frações em função de x:

$$\frac{8}{x} = \frac{15}{10} \times \frac{16}{24} \times \frac{80}{90}.$$

Mas lembre-se que nem todas são **diretamente** proporcionais, então não podemos calcular assim, desse modo todas as frações que são **inversamente** proporcionais em relação às horas devem ser invertidas (o numerador troca de lugar com o denominador):

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{15} \times \frac{24}{16} \times \frac{80}{90}.$$

Organizamos as multiplicações de frações do lado direito:

$$\frac{8}{x} = \frac{240}{240} \times \frac{80}{90}.$$

Como qualquer número dividido por ele mesmo é igual a 1, temos:

$$\frac{8}{x} = \frac{80}{90}.$$

Agora multiplicamos 'cruzado' para identificar x:

$$80x = 720.$$

Isole o x para descobrir o número de horas:

$$x = 720/80 = 9.$$

Portanto, a resposta correta é alternativa (d).

Frente 2: Funções

8. Uma função real f (definida em todos os números) é dita *par* se $f(x) = f(-x)$ para todo x, e é dita *ímpar* se $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Determine quais das funções a seguir são pares, ímpares, ou nenhum das duas:
   (a) $f(x) = x$
   (b) $f(x) = x^2$
   (c) $f(x) = x^3$
   (d) $f(x) = \text{sen }(x)$
   (e) $f(x) = \cos\,(x)$
   (f) $f(x) = \tan\,(x)$

Resolução: (por Bruno O.)

(a) $-f(-x) = -(-x) = x = f(x)$. Ímpar.

(b) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Par.

(c) Ímpar.

(d) Para determinar a paridade das funções trigonométricas, podemos analisar o círculo trigonométrico. Notaremos que

$$\text{sen }(-x) = -\text{sen }(x).$$

Logo é ímpar.

(e) Par.

(f)

$$\tan(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Ímpar.

9. (UFMG 2011 - Adaptada) Uma fábrica vende determinado produto somente por encomenda de, no mínimo, 500 unidades e, no máximo, 3.000 unidades. O preço P, em reais, de cada unidade desse produto é fixado, de acordo com o número x de unidades encomendadas, por meio desta equação:

$$P = \begin{cases} 90, & \text{se } 500 \leq x \leq 1000, \\ 100 - 0,01x, & \text{se } 1000 < x \leq 3000. \end{cases}$$

O custo C, em reais, relativo à produção de x unidades desse produto é calculado pela equação

$$C = 60x + 10.000$$

O lucro L apurado com a venda de x unidades desse produto corresponde à diferença entre a receita apurada com a venda dessa quantidade e o custo relativo à sua produção.

Considerando essas informações, escreva a expressão do lucro L correspondente à venda de x unidades desse produto para $500 \leq x \leq 1000$ e para $1000 < x \leq 3000$.

Resolução: (por Bruno O.)

- Se $500 \leq x \leq 1000$, a receita apurada é $90x$ reais. Então,

$$L = 90x - C = 90x - 60x - 10000 = 30x - 10000.$$

- Se $1000 < x \leq 3000$, a receita apurada é

$$x \times (100 - 0,01x) = 100x - 0,01x^2.$$

  Portanto,

$$L = 100x - 0,01x^2 - 60x - 10000 = 40x - 0,01x^2 - 10000.$$

10. (UFMG 2012) Há várias regras para se determinar, com base na dose recomendada para adultos, a dose de um medicamento a ser ministrada a crianças. Analise estas duas fórmulas:

$$\text{Regra de Young: } c = \frac{x}{x+12}a,$$
$$\text{Regra de Cowling: } c = \frac{x+1}{24}a,$$

em que

- x é a idade da criança, em anos;
- a é a dose do medicamento, em cm^3, para adultos;
- e c é a dose do medicamento, em cm^3, para crianças.

Considerando essas informações,

(a) DETERMINE os valores de x para os quais as duas regras levam a doses iguais para crianças.

(b) Sabendo que as duas regras são aplicadas no cálculo de doses para crianças entre 2 e 13 anos de idade, DETERMINE os valores de x para os quais a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling.

Resolução:

(a) Igualamos as equações:

$$\frac{x}{x+12}a = \frac{x+1}{24}a \implies 24ax = (x+12)(x+1)a.$$

Notamos que a variável a consta em ambos os lados da equação. Podemos portanto dividir ambos os lados por a para obter:

$$\begin{aligned} 24x &= (x+12)(x+1) \\ 24x &= x^2 + x + 12x + 12 \\ 0 &= x^2 - 11x + 12. \end{aligned}$$

Então resolvemos para x:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot (12) = 121 - 48 = 73,$$

logo

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2}.$$

(b) Temos que $8 < \sqrt{73} < 9$. Logo

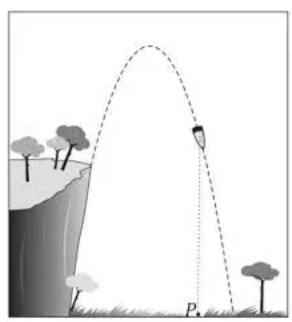
$$19/2 < x_1 = \frac{11 + \sqrt{73}}{2} < 10, \qquad 1 < x_2 = \frac{11 - \sqrt{73}}{2} < 3/2.$$

Além disso, escolhemos algum x no intervalo $[2, x_1]$, por exemplo, $x = 3$. Nesse caso, a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling. Logo, a resposta é: no intervalo

$$2 \leq x \leq \frac{11 + \sqrt{73}}{2}$$

a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling.

11. (FUVEST 2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura.

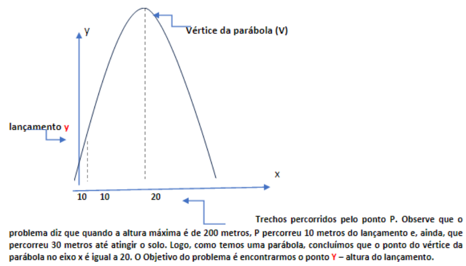


O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

(a) 60
(b) 90
(c) 120
(d) 150
(e) 180

Resolução: (por Maurício P. Trindade) Bom, este exercício, como se observa do próprio enunciado, diz respeito a uma parábola. Logo, precisamos conhecer algumas fórmulas dessa curva, a propósito, muito pedida nos vestibulares.

1º Passo: Recomendamos desenhar a curva no plano cartesiano e marcar os pontos dados no problema:



2º Passo: Assim, temos que o vértice da parábola **(V)** corresponde ao ponto **(Xv,Yv) = (20,200)**. Por outro lado, sabemos que a função quadrática é descrita pela equação: $y = ax^22 + bx + c$. Assim, precisaremos encontrar as constantes a, b e c.

O ponto "c", por definição, corresponde ao ponto em que a parábola cruza com o eixo y. No caso, igual a 0, como se observa no gráfico.

Para encontrarmos os pontos "a" e "b", usaremos as seguintes fórmulas referentes aos vértices da parábola:

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad e \qquad Xv = -\frac{b}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Substituindo os valores de Xv e Yv, teremos um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$20 = -\frac{b}{2a} \implies -b = 40a \implies b = -40a \tag{6}$$

$$200 = -\frac{\Delta}{4a} \implies 800a = -b^2 - 4ac \implies 800a = -b^2, \tag{7}$$

já que $c = 0$. Substituindo (6) em (7):

$$800a = -1600a^2 \implies a = -\frac{1}{2}$$

(observe que o "a" negativo corresponde à parábola descrita pela trajetória, ou seja, com concavidade para baixo). Substituindo em (6):

$$b = -40a \implies b = 20.$$

3º Passo: Finalizando, conseguimos, agora, determinar a equação da parábola descrita pelo projétil:

$$y = ax^2 + bx + c \implies y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x + 0 \implies y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x.$$

E, como nosso objetivo é determinar o valor de y quando $x = 10$ metros, basta substituirmos na equação:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 20x \implies y = -\frac{1}{2}(10)^2 + 20 \cdot 10 \implies y = 150 \text{ metros}.$$

Resposta: alternativa (d).

12. (FUVEST 2012) Considere a função

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2},$$

definida para $x \neq -1$. Então, para todo $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x)f(-x)$ é igual a

(a) -1
(b) 1
(c) $x + 1$
(d) $x^2 + 1$
(e) x^2

Resolução: (por Bruno O.) Começamos apenas utilizando a propriedade distributiva ("chuveirinho") da multiplicação:

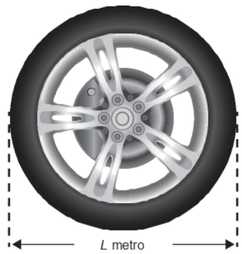
$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= \left[1 - \frac{4x}{(x+1)^2}\right] \times \left[1 - \frac{4(-x)}{(-x+1)^2}\right] \\ &= \left[1 - \frac{4x}{(x+1)^2}\right] \times \left[1 + \frac{4x}{(-x+1)^2}\right] \\ &= 1 + \frac{4x}{(-x+1)^2} - \frac{4x}{(x+1)^2} - \frac{4x}{(x+1)^2} \times \frac{4x}{(-x+1)^2}. \end{aligned}$$

Agora vamos igualar denominadores:

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= 1 + \frac{(4x)(x+1)^2 - 4x(-x+1)^2 - 16x^2}{(x+1)^2(-x+1)^2} \\ &= 1 + \frac{4x(x^2+2x+1) - 4x(x^2-2x+1) - 16x^2}{(x+1)^2(-x+1)^2} \\ &= 1 + \frac{8x^2 + 8x^2 - 16x^2}{(x+1)^2(-x+1)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Frente 3: Geometria Plana

13. (ENEM 2022) Os pneus estão entre os itens mais importantes para a segurança de um carro. Segundo revendedores especializados, o desgaste do pneu em um trajeto é diretamente proporcional ao número de voltas que ele efetua em contato com o solo, sem derrapar, durante esse trajeto, sendo que a constante de proporcionalidade k depende do material empregado na sua fabricação. O proprietário de um carro, cujo diâmetro do pneu mede L m, conforme indicado na imagem, pretende obter uma expressão que forneça uma estimativa para a medida do desgaste D desse pneu ao longo de uma viagem de x km. Para efeito dos cálculos, considerou o diâmetro do pneu como sendo L, independentemente da extensão do trajeto.



Disponível em: http://revista.pensecarros.com.br. Acesso em: 24 abr. 2015 (adaptado).

O valor de D é dado pela expressão

(a) $\dfrac{500 \cdot k \cdot x}{\pi \cdot L}$

(b) $\dfrac{1000 \cdot k \cdot x}{\pi \cdot L}$

(c) $\dfrac{1000 \cdot k \cdot x}{L}$

(d) $\dfrac{1000 \cdot k \cdot x}{\pi \cdot L^2}$

(e) $\dfrac{4000 \cdot k \cdot x}{\pi \cdot L^2}$

Resolução: (por Bruno O.) O desgaste D é diretamente propocional ao número de voltas N. Esse número é dado por

$$N = \frac{\text{Distância percorrida em km}}{\text{Comprimento da circunferência do pneu em km}}.$$

Sabemos que a viagem é de x km. Além disso, o comprimento de circunferência do pneu é dado por

$$2\pi r,$$

onde r é o raio. Nesse caso, temos que $r = L/2$ metros, ou, equivalentemente, $r = L/2000$ km. Então

$$N = \frac{x}{2\pi \frac{L}{2000}} = \frac{1000x}{\pi L}.$$

Concluímos que $D = kN = \dfrac{1000 \cdot k \cdot x}{\pi \cdot L}$, alternativa (b).

14. (Fuvest/87) Um comício político lotou uma praça semi-circular de 130 m de raio. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por m^2, qual é a melhor estimativa do número de pessoas presentes?

(a) dez mil

(b) cem mil

(c) meio milhão

(d) um milhão

(e) muito mais do que um milhão

Resolução: (por Tiago Alves) A quantidade de pessoas na praça pode ser calculada por:

$$\text{Quantidade de pessoas na praça} = (\text{Pessoas por } m^2) \times (\text{Área da praça}).$$

A questão diz que a praça possui uma forma semi-circular, ou seja, sua área é a metade da área de um círculo, que é:

$$A = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Como o raio da praça é de $130m^2$,

$$A = \frac{3,14 \times 130^2}{2}$$
$$A = 26.533\ m^2.$$

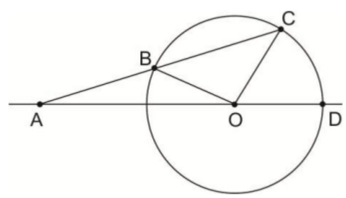
E como há uma média de 4 pessoas por m^2, teremos então

$$\text{Quantidade de pessoas na praça} = 4 \times 26.533$$
$$\text{Quantidade de pessoas na praça} = 106.132.$$

Sendo assim, a melhor estimativa para a quantidade de pessoas na praça e de cem mil pessoas. Resposta: altenativa (b).

15. . (Fuvest/09) Na figura, B, C e D são pontos distintos da circunferência de centro O, e o ponto A é exterior a ela. Além disso,

    1. A, B, C e A, O, D são colineares;
    2. $AB = OB$;
    3. CÔD mede α radianos.



Nessas condições, a medida do ângulo ABO, em radianos, é igual a

(a) $\pi - \frac{\alpha}{4}$

(b) $\pi - \frac{\alpha}{2}$

(c) $\pi - \frac{2\alpha}{3}$

(d) $\pi - \frac{3\alpha}{4}$

(e) $\pi - \frac{3\alpha}{2}$

Resolução: Sabemos que os ângulos

$$AOB = BAO \tag{8}$$

pois $AB = OB$, e

$$OBC = BCO, \tag{9}$$

pois $OB = OC$, já que ambos correspondem ao raio da circunferência. Além disso,

$$COD + BOC + AOB = \pi \implies \alpha + BOC + AOB = \pi \tag{10}$$

e

$$BOC + BCO + OBC = \pi \implies 2 \cdot OBC + BOC = \pi. \tag{11}$$

Subtraindo as equações acima OBC, temos $2 \cdot OBC - \alpha - AOB = 0$. Por outro lado, no triângulo ABO, temos:

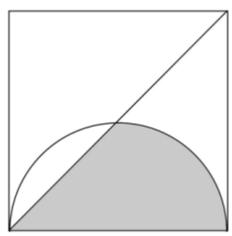
$$2 \cdot AOB + ABO = \pi.$$

Usando também que $ABO = \pi - OBC$, podemos realizar substituições nas três últimas equações para encontrar

$$ABO = \pi - \frac{2}{3}\alpha,$$

alternativa (c).

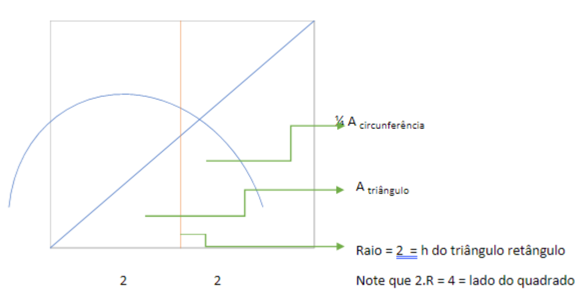
16. (Fuvest/00) Na figura seguinte, estão representados um quadro de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2.



Então a área da região hachurada é

(a) $\frac{\pi}{2} + 2$
(b) $\pi + 2$
(c) $\pi + 3$
(d) $\pi + 4$
(e) $2\pi + 1$

Resolução: (por Maurício P. Trindade) Primeiramente, sugiro redesenhar a figura para fazer algumas anotações importantes. Acredito que, redesenhando, você consegue compreendê-la melhor. Mas, é apenas uma sugestão. Siga o método que melhor se adapta à sua forma de estudo.



Como a circunferência tem $R = 2$, tiramos que ela tem a mesma medida da altura do triângulo retângulo.

Observe que a área hachurada corresponde à 1/4 da área da circunferência, ou seja,

$$A_C = \frac{\pi R^2}{4},$$

mais a área do triângulo retângulo, que é

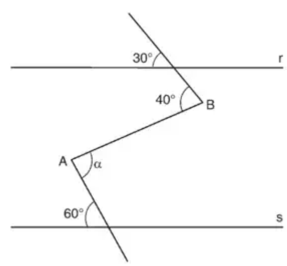
$$A_T = \frac{bh}{2}.$$

Agora ficou fácil. Basta substituir os valores, pois todos foram informados no problema:

$$A_T = \frac{bh}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$
$$A_C = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi.$$

Portanto, a área hachurada é igual a $\pi + 2$, alternativa (b).

17. (FGV) Na figura, os pontos A e B estão no mesmo plano que contém as retas paralelas r e s. Assinale o valor de α:



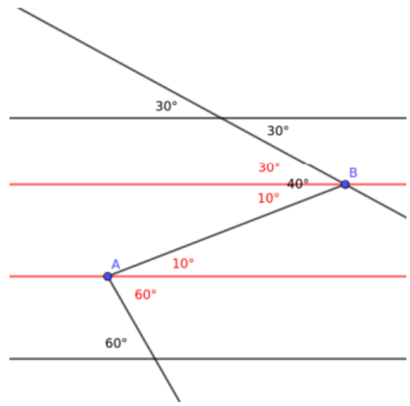
(a) 30°
(b) 50°
(c) 40°
(d) 70°
(e) 60°

Resolução: (por Amanda Costa) Vamos usar os ângulos entre as paralelas, logo 30º será oposto pelo vértice que também é 30º.

Traçamos duas paralelas nos pontos B e A. Usando a regra de alternos internos entre a reta r e a nova reta traçada no ponto B identificamos que a parte superior da mesma é 30º, consequentemente a parte inferior deve ser 10º para que se mantenha o total de 40º.

Agora olhando para a reta traçada no ponto A podemos chegar a conclusão que a parte superior mede 10º por ser alterno interno em relação a reta traçada em B.

Para identificar a parte inferior da reta traçada em A percebemos que é alterno interno aos 60º na reta s.



Logo após de termos identificado partes do mesmo ângulo realizamos a soma para identificar o total:

$$\alpha = 10 + 60 = 70.$$

Portanto, a resposta correta é alternativa (d).

18. Um agricultor utilizava toda a área de uma região plana, em formato retangular, com 50 m de largura e 240 m de comprimento, para o plantio de mudas. Seguindo recomendações técnicas, cada muda é plantada no centro de uma pequena região retangular de 10 cm de largura por 20 cm de comprimento.

    Esse agricultor decidiu ampliar a área destinada ao plantio de mudas, utilizando agora um terreno, também plano, em formato retangular, com 100 m de comprimento por 200 m de largura. As mudas deverão ser plantadas respeitando-se as mesmas recomendações técnicas.

    Com o aumento da área destinada ao plantio, a quantidade máxima de mudas que poderão ser plantadas a mais é

    (a) 100 000
    (b) 400 000
    (c) 600 000
    (d) 1 000 000
    (e) 1 600 000

Resolução: (por Bruno O.) A primeira região utilizada tinha

$$50 \cdot 240 = 12.000\ m^2 = 120.000.000\ cm^2$$

de área (lembre-se que 1 $m^2 = (100\ cm)^2 = 10000\ cm^2$). A segunda região tem

$$100 \cdot 200\ m^2 = 200.000.000\ cm^2$$

de área. A diferença é, portanto, de 80.000.000 cm^2 em área. Cada muda requer $10 \cdot 20 = 200\ cm^2$ de área. Então cabem

$$\frac{80.000.000}{200} = 400.000$$

mudas a mais no novo terreno. Alternativa (b).

Frente 4: Progressões Aritmética e Geométrica

19. (FUVEST 2005) Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, espectivamente, 4, -4 e -9 aos primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, um dos termos da progressão aritmética é:
    (a) 9
    (b) 11
    (c) 12
    (d) 13
    (e) 15

Resolução: (por Lucas Lopes) Se três números positivos estão em Progressão Aritmética (PA), eles atendem ao seguinte critério: "o próximo termo é igual ao termo anterior somado a uma constante, denominada razão da PA".

Uma consequência da definição anterior é que a diferença entre um determinado termo e o termo imediatamente anterior será, sempre, a razão da PA. Logo, pode-se afirmar que os três números descritos no enunciado são:

$$x - r, x, x + r$$

onde r é a razão da Progressão Aritmética.

Pelo enunciado, a soma destes três termos resulta em 30. Logo,

$$x - r + x + x + r = 3x = 30 \implies x = 10.$$

Portanto, a PA pode ser reescrita como

$$10 - r, 10, 10 + r$$

Adicionando, respectivamente, 4, -4 e -9 dos três termos da PA, obtém-se o seguinte:

$$14 - r, 6, 1 + r$$

Fazendo estas operações, o enunciado afirma que os três novos termos estão em Progressão Geométrica (PG). Logo, eles atendem ao seguinte critério: "o próximo termo é igual ao termo anterior multiplicado a uma constante, denominada razão da PG".

Uma consequência da definição anterior é que a razão entre um determinado termo e o termo imediatamente anterior será, sempre, a razão da PG. Logo, pode-se afirmar que os três números descritos no enunciado são:

$$\frac{x}{q}, x, xq$$

Onde q é a razão da Progressão Geométrica. Portanto,

$$\frac{x}{\frac{x}{q}} = \frac{xq}{x} = q$$

Aplicando esta ideia nos termos do enunciado, chega-se à seguinte conclusão:

$$\frac{6}{14 - r} = \frac{1 + r}{6}$$

Desenvolvendo a expressão acima, chega-se

$$(14 - r)(1 + r) = 36$$

Aplicando a propriedade distributiva, chega-se a

$$\begin{aligned} 14 + 14r - r - r^2 &= 36 \\ -r^2 + 13r + 14 - 36 &= 0 \\ r^2 - 13r + 22 &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando-se o Método de Resolução de equações do segundo grau, chegam-se aos seguintes valores de r:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22}}{2 \cdot 1} \\ r &= \frac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} \\ r &= \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} \\ r_1 &= \frac{13 + 9}{2} = 11 \\ r_2 &= \frac{13 - 9}{2} = 2. \end{aligned}$$

Portanto, a PA original pode ter 2 valores distintos para a razão. Considerando $r = 11$, os três termos da PA seriam

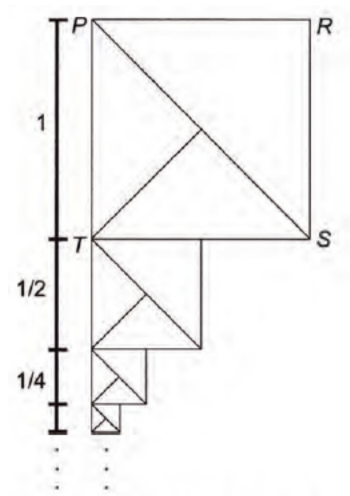
$$-1, 10, 21$$

Porém, de acordo com o enunciado, a PA somente possui números positivos. Logo, $r = 11$ não é sua razão. Considerando $r = 2$, os três termos da PA seriam:

$$8, 10, 12$$

Logo, a alternativa que contém um destes termos é a **alternativa (c).**

20. (ENEM 2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente. Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

(a) $(1/2)^{100}$
(b) $(1/2)^{99}$
(c) $(1/2)^{97}$
(d) $(1/2)^{-98}$
(e) $(1/2)^{-99}$

Resolução: (por Lucas Lopes) De acordo com o enunciado, o lado do quadrado seguinte sempre medirá metade do quadrado anterior. Isso implica que as medidas do lado do quadrado podem ser escritas como uma Progressão Geométrica (PG).

Uma PG sempre atenderá ao seguinte critério: "o próximo termo é igual ao termo anterior multiplicado a uma constante, denominada razão da PG". O termo geral da PG pode ser escrito como:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde a_n é o próximo termo da PG, a_1 é o primeiro termo da PG e q, a razão da PG.

De acordo com o enunciado, o primeiro quadrado desenhado (PRST) possui lado com medida 1. Portanto, na PG do problema:

$$a_1 = 1$$

Além disso, o enunciado explica que o lado do quadrado seguinte terá medida do lado igual à medida do quadrado anterior. Isso implica em que o lado do quadrado deve ser multiplicado por meio para obter a medida do lado do próximo quadrado. Com isso, pode-se afirmar que a razão da PG será:

$$q = \frac{1}{2}$$

Portanto, o termo geral da PG deste problema pode ser expresso como:

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Como o enunciado pede a medida do centésimo lado, o n no termo geral da PG será $n = 100$. Isso resulta em:

$$a_{100} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100-1}$$
$$a_{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{99}.$$

O resultado acima é o que está afirmado na **alternativa (b)**.

Curiosidade: O valor da resposta deste exercício, em metros, é, aproximadamente, $1,58 \cdot 10^{-30}$, o que é cerca de um quintilhão (1.000.000.000.000.000.000) de vezes menor que um átomo de hidrogênio!