SALVAGUARDA

RESOLUÇÃO COMENTADA

*Olá, estudante! Este documento traz a resolução comentada da lista de **abril***

Resolução comentada da lista de abril – matemática

Frentes 1 e 2: Matemática Básica e Funções

1. A população de uma cidade em 1910 era de 50000 habitantes, e ela duplica a cada 10 anos. Qual será a população da cidade
   (a) em 1970?
   (b) em 1990?
   (c) em 2000?

Resolução: (por Bruno Carvalho) Há pelo menos duas possíveis soluções. A primeira delas:

(a) A população da cidade em

- 1920 será de $2 \cdot 50.000 = 100.000$,
- 1930 será de $2 \cdot 100.000 = 200.000$,
- em geral, após $10n$ anos, onde $n = 1, 2, 3, \dots$, a população será de $2^n \cdot 50.000$.

Portanto, em 1970, passados 60 anos desde 1910, a população da cidade será

$$2^6 \cdot 50.000 = 64 \cdot 50.000 = 3.200.000 \text{ habitantes.}$$

(b) Pelo item (a), a população em 1990 será de

$$2^8 \cdot 50.000 = 256 \cdot 50.000 = 12.800.000 \text{ habitantes.}$$

(c) A população em 2000 será o dobro daquela de 1990:

$$2 \cdot 12.800.000 = 25.600.000 \text{ habitantes.}$$

Alternativamente, para uma segunda solução, pode-se usar a fórmula para crescimento exponencial:

$$x(t) = x_0 \cdot 2^{kt},$$

onde x representa o número de habitantes, t representa o tempo (escolheremos t como número de anos passados desde 1910), x_0 e k são constantes a serem encontradas. Utilizamos a base 2 pois é mais conveniente ao exercício, já que a população **duplica** em certo período. Se definirmos $t = 0$ equivalente ao ano 1910, temos

$$x(0) = x_0 2^0 = x_0 = 50000.$$

Por outro lado, podemos escolher $t = 10$ para calcular k:

$$x(10) = 50000 \cdot 2^{10k} = 100000,$$

pois $t = 10$ equivale ao ano de 1920, quando a população duplicou pela primeira vez desde 1910. Temos, portanto,

$$2^{10k} = 2 \implies (2^k)^{10} = 2,$$

onde utilizamos uma propriedade da exponencial. Logo,

$$2^k = 2^{\frac{1}{10}},$$

por onde concluímos $k = \dfrac{1}{10}$. Assim, a população em função do tempo, em anos, é dada por

$$x(t) = 50000 \cdot 2^{\frac{t}{10}}.$$

Por exemplo, em 1970, temos $t = 1970 - 1910 = 60$, e a população será

$$x(60) = 50000 \cdot 2^{\frac{60}{10}} = 50000 \cdot 2^6 = 50000 \cdot 64 = 3.200.000.$$

Analogamente se pode calcular a população em 1990 e 2000.

2. A população de uma cidade em 1870 era de 25000 habitantes, e ela triplica a cada 50 anos. Qual será a população da cidade
   (a) em 1990?
   (b) em 2030?

Resolução: (por Bruno Carvalho) Nesse caso, como $1990 - 1870 = 120$ não é um múltiplo de 50, não é imediato resolver a questão da mesma maneira que a primeira solução da questão anterior. Utilizaremos, portanto, uma função exponencial novamente. Desta vez, escolhemos a base 3, pois lidamos com um problema no qual a população **triplica** em certo período de tempo. Escrevemos

$$x(t) = x_0 \cdot 3^{kt}.$$

De maneira similar ao exercício anterior, podemos encontrar

$$x_0 = 25000, \qquad k = \frac{1}{50},$$

se escolhermos t como anos passados a partir de 1870. Logo, em 1990, a população será de

$$x(1990 - 1870) = x(120) = 25000 \cdot 3^{\frac{120}{50}} = 25000 \cdot 3^{\frac{12}{5}} 25000 \cdot \sqrt[5]{3^{12}} \approx 25000 \cdot 14 = 350.000.$$

Já em 2030, teremos

$$x(2030 - 1870) = x(160) \approx 840.870.$$

3. (ENEM 2021) Uma empresa de ônibus utiliza um sistema de vendas de passagens que fornece a imagem de todos os assentos do ônibus, diferenciando os assentos já vendidos, por uma cor mais escura, dos assentos ainda disponíveis. A empresa monitora, permanentemente, o número de assentos já vendidos e compara-o com o número total de assentos do ônibus para avaliar a necessidade de alocação de veículos extras. Na imagem tem-se a informação dos assentos já vendidos e dos ainda disponíveis em um determinado instante.

A razão entre o número de assentos já vendidos e o total de assentos desse ônibus, no instante considerado na imagem, é
   (a) $\frac{16}{42}$,
   (b) $\frac{16}{26}$,
   (c) $\frac{26}{42}$,
   (d) $\frac{42}{26}$,
   (e) $\frac{42}{16}$.

Resolução: (por Murilo Buratini) O enunciado pede por uma razão, e toda razão é dada por

$$\frac{a}{b}$$

onde a e b são números inteiros. Nesse caso, pede-se a razão entre assentos que já foram vendidos (escuros) e total de assentos (escuros + claros). Foram vendidos 16 assentos, de um total de $16+26 = 42$. Logo, a razão solicitada é

$$\frac{\text{Vendidos}}{\text{Total}} = \frac{16}{42}.$$

Portanto a resposta correta é item (a).

4. (FUVEST 2023) Duas empresas de entrega de mercadorias, A e B, são concorrentes. A empresa A cobra R$ 4,00 por quilo da encomenda e mais R$ 30,00 de taxa fixa. Já a tarifa da empresa B é de R$ 6,00 por quilo, sem taxa fixa, para encomendas de até 30 quilos; para encomendas de mais de 30 quilos, a empresa B cobra R$ 2,00 por quilo, mais uma taxa fixa de R$ 120,00.
   (a) Dê a expressão da função que descreve a tarifa cobrada pela empresa A em termos do peso x da encomenda.
   (b) Paral qual intervalo de pesos é mais barato pedir uma entrega pela empresa A do que pela empresa B?
   (c) Um cliente solicitou duas encomendas: uma entregue pela empresa A, e outra, pela empresa B, com peso total de 200 quilos. Quais são as possíveis maneiras de distribuir esse peso entre as duas empresas, sabendo que a tarifa de entrega total foi de R$ 850,00?

Resolução: (por Bruno Carvalho)

(a) A expressão para a tarifa T_A em função do peso x cobrada pela empresa A é:

$$T_A(x) = 30 + 4x,$$

pois a taxa fixa é de 30 reais, e o quilo da encomenda custa 4 reais.

(b) A tarifa da empresa B, em função do peso é:

$$T_B(x) = \begin{cases} 6x, & x \leq 30, \\ 120 + 2x, & x > 30. \end{cases}$$

Queremos satisfazer a condição $T_A(x) < T_B(x)$. Supondo, primeiramente, $x \leq 30$, a condição se traduz em

$$\begin{aligned} 30 + 4x &< 6x \\ 30 &< 2x \\ 15 &< x. \end{aligned}$$

Logo, para pesos no intervalo $(15, 30]$ é mais barato pedir uma entrega pela empresa A. Agora supondo $x > 30$, teremos

$$\begin{aligned} 30 + 4x &< 120 + 2x \\ 2x &< 90 \\ x &< 45. \end{aligned}$$

Portanto, combinando ambos os resultados acima, temos que para pesos no intervalo

$$x \in (15, 45]$$

a empresa A faz entregas mais baratas.

(c) Seja x_A o peso distribuído à empresa A e x_B o peso distribuído à empresa B. Primeiramente, temos a condição:

$$x_A + x_B = x_{\text{total}} = 200.$$

Podemos, portanto, reescrever

$$x_A = 200 - x_B.$$

A restrição à tarifa pode ser escrita como:

$$850 = T_A(x_A) + T_B(x_B) = \begin{cases} 30 + 4x_A + 6x_B, & x \leq 30, \\ 30 + 4x_A + 120 + 2x_B, & x > 30 \end{cases}$$

No primeiro caso, quando $x \leq 30$, teremos

$$\begin{aligned} 850 = 30 + 4x_A + 6x_B &= 30 + 4(200 - x_B) + 6x_B \\ &= 30 + 800 + 2x_B \\ &\implies 2x_B = 20 \implies x_B = 10, \end{aligned}$$

e, consequentemente, $x_A = 200 - 10 = 190$ kg.

No segundo caso, quando $x > 30$, temos

$$850 = 30 + 4x_A + 120 + 2x_B.$$

Podemos substituir novamente $x_A = 200 - x_B$ e resolver a equação, encontrando $x_A = 150$ e $x_B = 50$ kg.

5. (OBMEP - Banco de Questões 2020) Em uma frutaria, Jaime percebeu que uma laranja custa o mesmo que meia maçã mais meio real, percebeu também que um terço de uma maçã custa o mesmo que um quarto de uma laranja mais meio real. Com o valor de 5 laranjas mais 5 reais, quantas maçãs Jaime consegue comprar?

Resolução: (por Gustavo B. Moraes) Seja M o valor de uma maçã e L o valor de uma laranja, através das informações oferecidas pelo enunciado, podemos deduzir as seguintes relações:

$$L = \frac{1}{2} \cdot M + 0,5 \tag{1}$$

$$\frac{1}{3} \cdot M = \frac{1}{4} \cdot L + 0,5. \tag{2}$$

Perceba que as equações (1) e (2) podem ser relacionadas como um sistema de equação com duas incógnitas. Desse modo, podemos utilizar desse método para descobrirmos os valores de M e L.
A partir desse ponto, ficará a cargo do leitor (a) a escolha de qual método utilizar para resolver o sistema de equações (adição ou substituição). Desenvolvido o sistema, temos

$$M = 3, \qquad L = 2.$$

Por fim, para respondermos a pergunta da questão, basta que façamos

$$5 \cdot L + 5 = Qd,$$

onde Qd representa a quantidade de dinheiro que Jaime possui para comprar as suas maçãs. Substituindo o valor de L acima, seremos capazes de determinar que Jaime possui R$ 15,00 a sua disposição, logo ele poderá comprar até 5 maçãs.

6. (OBMEP - Banco de Questões 2020) Em um recipiente existem 6 litros de uma mistura homogênea de dois líquidos (alfa e beta) na razão de 7:2, enquanto que em outro recipiente existem 9 litros de outra mistura com os mesmos dois líquidos (alfa e beta), só que neste a razão é 4:7. Misturando os líquidos dos dois recipientes, qual será a nova razão?

Resolução: (por Guilherme Sonego) Relembremos que uma razão é uma relação entre duas medidas. Podemos relacionar assim diversas unidades, como velocidade, volume, massa etc. É importante saber, porém, interpretar o que cada razão representa e o que podemos extrair delas. Por exemplo, uma razão de 1:1 entre dois ingredientes em uma receita nos diz que teremos uma mesma quantidade dos dois ingredientes na mistura final, mas a informação do quanto cada um representa na mistura não é explícita.

Resolução

Com isso em mente, notemos que o exercício nos pergunta a razão final entre dois líquidos em uma mistura formada exclusivamente por estes dois. Uma estratégia que podemos empregar para isso é descobrir a quantia em litros de cada uma dessas substâncias na mistura final para assim montarmos nossa razão com esses valores.

Para descobrirmos a quantia em litros de cada um na mistura final, vamos descobrir primeiramente a quantia presente em cada frasco e então somá-las, pois a mistura final é composta por essas duas.

Razão entre Alfa e a primeira mistura

O primeiro passo será determinar uma razão entre α e a mistura de cada frasco. Essa razão nos representa o quanto de α teremos por litro de mistura. Para isso, somaremos os dois valores da razão entre α e β pois a mistura é composta somente por esses dois.

$$\frac{\alpha_1}{\ell} = \frac{7}{7+2} = \frac{7}{9} \tag{3}$$

Quantia de Alfa na primeira mistura

A quantia então vai ser multiplicarmos essa razão pela quantia em litros de mistura:

$$\frac{7}{9} \cdot 6\ell = \frac{14}{3}\ \ell \tag{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{14}{3}\ \ell$$

Razão e quantia de Alfa na segunda mistura

Repetindo esse mesmo processo para a segunda mistura:

$$\alpha_2 = \frac{4}{4+7} \cdot 9\ \ell = \frac{36}{11}\ \ell \tag{5}$$

Quantia de Alfa na mistura final

Agora basta somarmos as duas quantias para sabermos quantos litros há de α na mistura final:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{14}{3} + \frac{36}{11} \tag{6}$$

$$\frac{14 \cdot 11}{33} + \frac{36 \cdot 3}{33} = \frac{262}{33}\ \ell$$

$$\alpha_f = \frac{262}{33}\ \ell$$

Razão e quantia de Beta na primeira mistura

Com a quantia de α em mãos, precisamos agora repetir todo esse processo para β e enfim compará-los:

$$\beta_1 = \frac{2}{7+2} \cdot 6\ \ell = \frac{4}{3}\ \ell \tag{7}$$

Razão e quantia de Beta na segunda mistura

$$\beta_2 = \frac{7}{4+7} \cdot 9\ \ell = \frac{63}{11}\ \ell \tag{8}$$

Quantia de Beta na mistura final

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{4}{3} + \frac{63}{11} \tag{9}$$

$$\frac{4 \cdot 11}{33} + \frac{63 \cdot 3}{33} = \frac{233}{33}\ \ell$$

$$\beta_f = \frac{233}{33}\ \ell$$

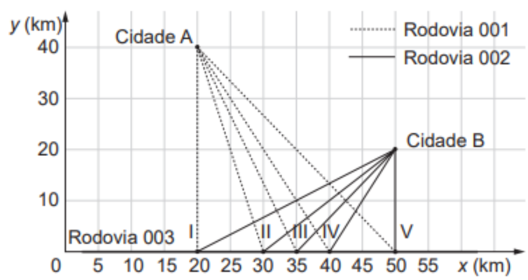
Razão final de Alfa e Beta

Enfim com as quantias em mãos, basta montarmos a razão como pedida:

$$\frac{\alpha_f}{\beta_f} = \frac{\frac{262}{33}}{\frac{233}{33}} \tag{10}$$

$$\frac{\alpha_f}{\beta_f} = \frac{262}{233}$$

7. (ENEM 2022) O governo de um estado pretende realizar uma obra de infraestrutura para auxiliar na integração e no processo de escoamento da produção agrícola de duas cidades. O projeto consiste na interligação direta das cidades A e B com a Rodovia 003, pela construção das Rodovias 001 e 002. As duas rodovias serão construídas em linha reta e deverão se conectar à Rodovia 003 em um mesmo ponto, conforme esboço apresentado na figura, na qual estão também indicadas as posições das cidades A e B, considerando o eixo x posicionado sobre a Rodovia 003, e cinco localizações sugeridas para o ponto de conexão entre as três rodovias.

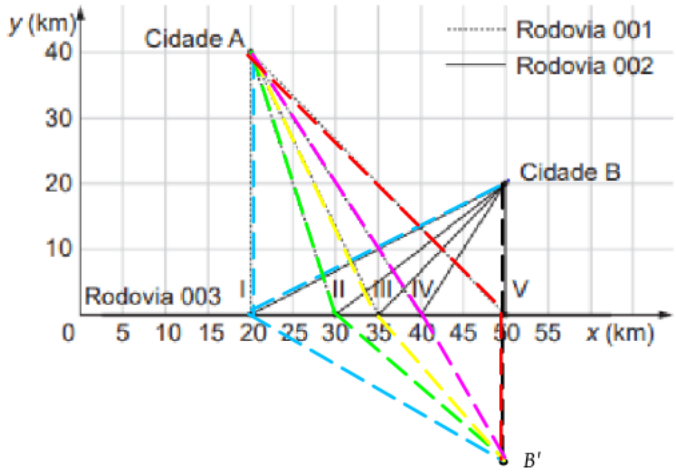


Pretende-se que a distância percorrida entre as duas cidades, pelas Rodovias 001 e 002, passando pelo ponto de conexão, seja a menor possível. Dadas as exigências do projeto, qual das localizações sugeridas deve ser a escolhida para o ponto de conexão?

(a) I
(b) II
(c) III
(d) IV
(e) V

Resolução: (por Bruno Carvalho)

Há duas soluções possíveis. A primeira delas é mais eficiente e intuitiva: sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Portanto, vamos espelhar a cidade B para a parte inferior do gráfico, à mesma distância do eixo x, como na figura.



Então as distâncias totais percorridas em cada uma dos casos I, II, III, IV e V podem ser representadas como na figura, em termos dos tracejados azul, verde, amarelo, rosa e vermelho, respectivamente. Isso é possível graças à simetria da figura. Dessa forma, é mais simples percebermos que o tracejado em rosa, correspondende ao caso IV, mais se assemelha a uma reta e, portanto, representa a menor distância entre A e B' (consequentemente, entre A e B). Logo a alternativa correta é **(d) IV**.

Numa segunda resolução, usaremos o Teorema de Pitágoras para calcular a distância total percorrida entre as cidades A e B, em cada um dos casos:

- Caso I:

$$\begin{aligned} d &= \text{distância da cidade A ao ponto I} + \text{distância do ponto I à cidade B} \\ &= 40 + \sqrt{20^2 + (50-20)^2} \\ &= 40 + \sqrt{400+900} = 40 + \sqrt{1300} \\ &= 40 + \sqrt{10^2 \cdot 13} = 40 + 10\sqrt{13} \\ &\sim 40 + 10 \cdot 3.6 = 76. \end{aligned}$$

- Caso II:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{40^2 + (30-20)^2} + \sqrt{20^2 + (50-30)^2} = \sqrt{1700} + \sqrt{800} \\ &= 10\sqrt{17} + 10\sqrt{2^3} = 10\sqrt{17} + 20\sqrt{2} \\ &\sim 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1.4 = 68. \end{aligned}$$

- Caso III:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{40^2 + (35-20)^2} + \sqrt{20^2 + (50-35)^2} = \sqrt{1825} + \sqrt{725} \\ &= \sqrt{25 \cdot 73} + \sqrt{25 \cdot 29} = 5\sqrt{73} + 5\sqrt{29} \\ &\sim 5 \cdot 8.5 + 5 \cdot 5.4 = 69.5. \end{aligned}$$

- Caso IV:

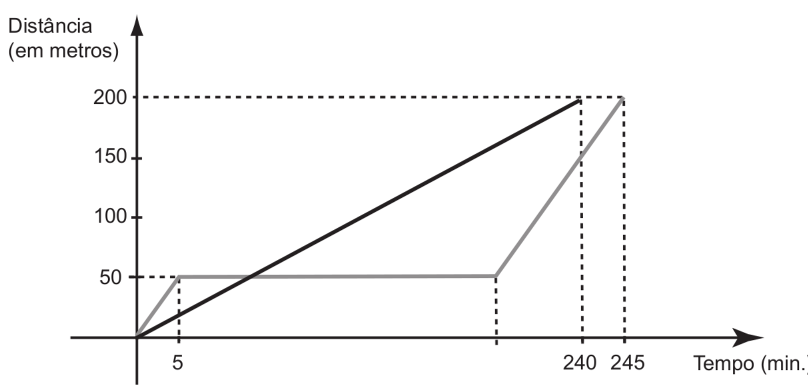
$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{40^2 + (40-20)^2} + \sqrt{20^2 + (50-40)^2} = \sqrt{2000} + \sqrt{500} \\
&= \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 5} + \sqrt{100 \cdot 5} \\
&= 20\sqrt{5} + 10\sqrt{5} \\
&\sim 30 \cdot 2.25 = 67.5.
\end{aligned}$$

- Caso V:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{40^2 + (50-20)^2} + 20 = \sqrt{2500} + 20 \\
&= 50 + 20 = 70.
\end{aligned}$$

Logo a localização escolhida deve ser a de número IV.

8. (UFMG 2013) A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula a lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. as duas partem do mesmo local no mesmo instante. a tartaruga anda sempre com velocidade constante. a lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

(a) Determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.

(b) Determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.

(c) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

Resolução: (por Ana Clara)

(a)

$$\begin{aligned}
240 \text{ minutos} &- x \\
60 \text{ minutos} &- 1 \text{ hora},
\end{aligned}$$

logo

$$60x = 240 \implies x = \frac{240}{6} = 4 \text{ horas.}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Velocidade média} &= \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo em que a distância foi percorrida}} \\ &= \frac{200}{4} = 50m/h. \end{aligned}$$

(b) Se a tartaruga anda em velocidade constante de 50m/h e o gráfico nos mostra que a tartaruga ultrapassou a lebre exatamente em 50 metros, então isso ocorrou com 1 hora de corrida.

(c) Corrida inicial = 50 metros em 5 minutos
Cochilo = 245 - (corrida inicial + corrida final)
Corrida final = 150 metros em x minutos. Logo, a regra de três

$$\begin{gathered} 50 - 5 \\ 150 - x \end{gathered}$$

implica

$$750 = 50x \implies x = 15.$$

Então
Cochilo = 245 - (5+15) = 245 - 20 = 225 minutos ou 3 horas e 45 minutos.

9. (FUVEST 2023) Dado um número natural $n \geq 2$, o primorial de n, denotado por $n\#$ é o produto de todos os números primos menores que ou iguais a n. Por exemplo,

$$6\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

O menor número da forma $n\#$ que é maior que 2000 é

(a) 2300
(b) 2305
(c) 2310
(d) 2312
(e) 2322

Resolução: (por Gustavo B. Moraes) Primeiramente, tomemos o número 6# exemplificado no enunciado como referência para resolvermos a questão. Como já é sabido, após o número 5, o número primo seguinte é 7 , dito isso, tentemos encontrar o seu primorial

$$7\# = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{6\#} \cdot 7 = 30 \cdot 7 = 210 \tag{11}$$

Observando atentamente o número 7#, veremos que se o multiplicarmos por 10, teremos um número maior do que 2000. Entretanto, como 10 não é um número primo, ele não entrará no calculo dos primoriais, todavia, é fácil perceber que para todo número primo maior do que 10, o produto desse número por 7# também resultará em um valor maior do que 2000. Com isso em mente, e sabendo que o próximo número primo após o 7 é o 11 e que $11 > 10$, é fácil concluir que o menor número na forma n# maior do que 2000 é dado por

$$11\# = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}_{7\#} \cdot 11 = 210 \cdot 11 = 2310. \tag{12}$$

Letra (c).

10. (ENEM 2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir
   (a) 105 peças.
   (b) 120 peças.
   (c) 210 peças.
   (d) 243 peças.
   (e) 420 peças.

Resolução: (por Mauricio P. Trindade) Olá galera do Salvaguarda. O primeiro passo para resolver este exercício é identificar alguma relação entre as medidas das tábuas, uma vez que serão cortadas em pedaços exatamente iguais e sem sobras.

Em outras palavras, precisaremos encontrar um divisor comum para as 3 medidas (540, 810 e 1080), que são números inteiros, de modo que os restos das divisões sejam iguais a zero (sem sobras) e de tal forma que as demais restrições impostas pelo enunciado, de que as tábuas tenham o maior tamanho possível, mas, que o comprimento seja menor que 2 metros (200 cm).

E, para encontrá-lo, vamos primeiro fatorar esses números para acharmos o máximo divisor comum – MDC (lembrem-se de que qualquer número inteiro pode ser decomposto em números primos).

540	2		810	2		1080	2
270	2		405	3		540	2
135	3		135	3		270	2
45	3		45	3		135	3
15	3		15	3		45	3
5	5		5	5		15	3
1			1			5	5
	$=2^2 \times 3^3 \times 5^1$			$=2^1 \times 3^4 \times 5^1$			$= 2^3 \times 3^3 \times 5^1$

O MDC desses números pode ser calculado pela multiplicação dos números primos comuns, elevados ao menor expoente, conforme destacados acima, ou seja:

$$MDC = 2^1 \times 3^3 \times 5^1 = 270.$$

Porém, observem que 270 ¿ 200 e, assim, ultrapassa o tamanho máximo estabelecido. Logo, devemos procurar um número que seja divisor de 270 e menor que 200. Dividindo 270 por 2 temos **135**, o qual atende os requisitos do arquiteto.

Agora é só fazer as contas:

Cada tábua:		Vezes número de tábuas:
540 / 135 = 4	-------→	4 x 40 = 160
810 / 135 = 6	-------→	6 x 30 = 180
1080/ 135 = 8	-------→	8 x 10 = 80

Número total de peças produzidas = 160 + 180 + 80 = **420**.

Resposta: e

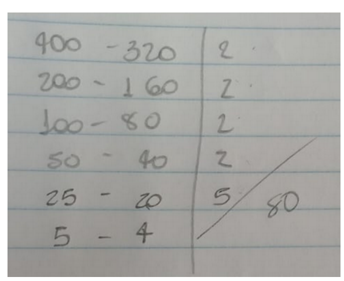
11. (ENEM 2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

    1. cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
    2. todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
    3. não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

    O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

    (a) 2.
    (b) 4.
    (c) 9.
    (d) 40.
    (e) 80.

Resolução: (por Ana Clara) Primeiramente encontramos o máximo divisor comum de 400 e 320:



Dessa forma, os 400 ingressos para a sessão vespertina podem ser divididos (80 para cada escola) para um número mínimo de 400/80 = 5 escolas, e os 320 podem ser divididos (80 para cada escola) para um número mínimo de 320/80 = 4 escolas. Sendo assim, o número mínimo de escolas necessárias é 9, alternativa (c).

12. (ENEM 2015) Uma fórmula para calcular o Índice de Massa Corporal (IMC) foi publicada pelo Departamento de Nutrição da Universidade de São Paulo. O estudo propõe uma equação capaz de identificar os falsos magros que, apesar de exibirem uma silhueta esguia, apresentam altos níveis de gordura, e os falsos gordos, que têm um IMC alto em decorrência de ganho de massa muscular, e não de gordura.

    A equação considera a massa do indivíduo, além do peso e da estatura. A fórmula é expressa pela soma do triplo da massa (M), em quilograma, com o quádruplo do percentual de gordura (G), tudo dividido pela altura (H), em centímetro. *Disponível em: http://drauziovarella.com.br. Acesso em: 27 nov. 2012 (adaptado).*

    A expressão algébrica que representa a nova maneira de calcular o IMC é dada por

    (a) $3M + 4G/H$,

    (b) $\dfrac{3M + 4G}{H}$,

    (c) $\dfrac{1/3 \cdot M + 1/4 \cdot G}{H}$,

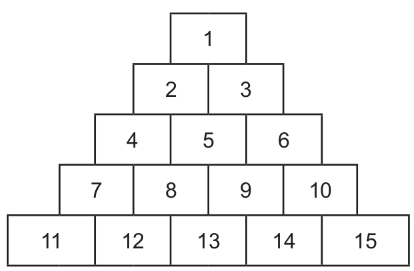
    (d) $3 \cdot \left(\dfrac{M + 4G}{H}\right)$,

    (e) $\dfrac{4 \cdot (3M + G)}{H}$.

    Resolução: Alternativa correta: c).

13. (UFMG 2013) Dentro dos bloquinhos que formam uma pirâmide foram escritos os números naturais, conforme ilustrado na figura abaixo, de forma que:

    - na primeira linha da pirâmide aparece um número: 1;
    - na segunda linha da pirâmide aparecem dois números: 2 e 3;
    - na terceira linha da pirâmide aparecem três números: 4, 5 e 6;
    - na quarta linha da pirâmide aparecem quatro números: 7, 8, 9 e 10, e assim sucessivamente.



    Considerando essas informações,

    (a) Determine quantos bloquinhos são necessários para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide.

    (b) Determine o último número escrito na trigésima linha da pirâmide.

    (c) Determine a soma de todos os números escritos na trigésima linha da pirâmide.

    Resolução: (por Mathuzalem F. de Lima)

(a) Perceba que a quantidade de blocos em cada linha corresponde ao número da linha, isso por construção do enunciado. Logo, temos que a quantidade de blocos necessários será uma PA de razão 1. Consideremos a soma até o décimo termo dessa PA:

$$S_{10} = \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = \frac{11\cdot 10}{2} = 11 \cdot 5 = 55.$$

Portanto, precisaremos de 55 bloquinhos para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide.

(b) Agora, teremos que analisa uma outra PA. Perceba que o último número de cada linha é justamente uma PA de razão 1 que começa do 1 e vai até o número da linha em que se está. Por exemplo,

$$\begin{gathered}
\text{Último da linha } 2 \Rightarrow 1+2=3 \\
\text{Último da linha } 3 \Rightarrow 1+2+3=6 \\
\text{Último da linha } 4 \Rightarrow 1+2+3+4=10 \\
\text{Último da linha } 5 \Rightarrow 1+2+3+4+5=15 \\
\text{Último da linha } 6 \Rightarrow 1+2+3+4+5+6=21 \\
\text{Último da linha } 7 \Rightarrow 1+2+3+4+5+6+7=28 \\
\vdots
\end{gathered}$$

Note que antes estávamos querendo saber a quantidade de blocos e agora estamos investigando o último número que aparece em cada linha e esse número será dado por uma PA. Isso se deve ao fato de que o último número de um bloco ser o número do último bloco anterior somado com a quantidade de blocos da linha seguinte, isto é, se chamarmos n_k o último número da linha k, então $n_{k+1} = n_k + (k+1)$ será o último número da linha k+1.
Portando, basta calcular a soma dessa PA até o número 30 (trigésima linha):

$$S_{30} = \frac{(1+30)\cdot 30}{2} = 31 \cdot \frac{30}{2} = 31 \cdot 15 = 465.$$

Logo, o último número da trigésima linha é 465.

(c) Por fim, calculemos a soma de todos os números da trigésima linha. Note que os números da linha trinta vão formar uma PA de razão 1 também, mas agora o primeiro termo dessa PA não é mais o 1. Precisamos encontrá-lo! Para isso, sabendo que o último termo é 465 (pela questão anterior) e o primeiro número dessa linha está a uma distância de 29 blocos do último, basta fazer essa subtração: $465 - 29 = 436$. Assim, sabemos que o primeiro termo da PA é 436 e o último é 465. Daí, segue que:

$$S_{30} = \frac{(436+465)\cdot 30}{2} = 901 \cdot \frac{30}{2} = 901 \cdot 15 = 13515.$$

Portanto, o a soma de todos os números da trigésima linha é 13515.

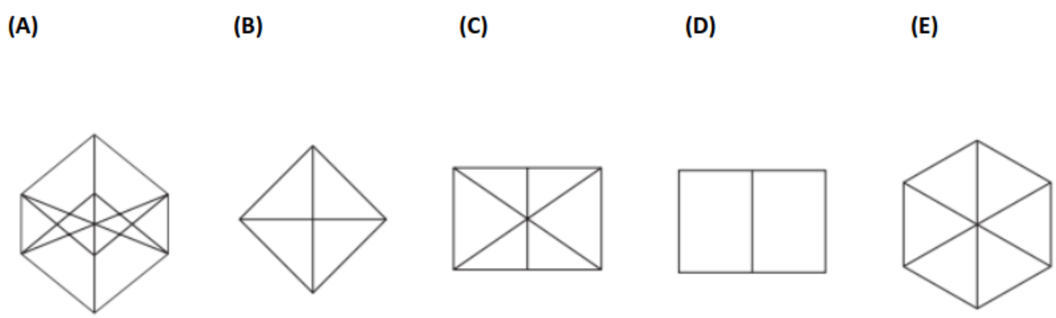
Observação: Perceba que as PA's que trabalhamos nessa questão são diferentes, embora parecidas. Nas letras (a) e (b), trabalhamos praticamente com a mesma PA, mas a primeira era para contar os blocos e a segunda para descobrir o número que devia estár no último bloco da linha 30. Na letra (c), temos uma PA com a mesma razão das outras (razão 1), mas que o primeiro termo não é mais o número 1 e sim o primeiro número da linha 30 (que é 436).
Espero que tenha se divertido nessa viagem pelo vasto mundo das Progressões Aritméticas e saiba que a equipe do Salva Guarda está aqui para ajudá-los a alcançar seus objetivos! Até a próxima!

Frente 3: Geometria Plana

14. (ENEM 2021) O Atomium, representado na imagem, é um dos principais pontos turísticos de Bruxelas. Ele foi construído em 1958 para a primeira grande exposição mundial depois da Segunda Guerra Mundial, a Feira Mundial de Bruxelas.

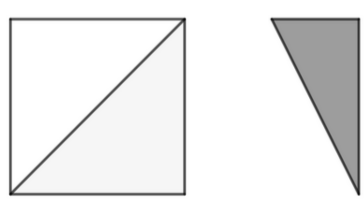
Trata-se de uma estrutura metálica construída no formato de um cubo. Essa estrutura está apoiada por um dos vértices sobre uma base paralela ao plano do solo, e a diagonal do cubo, contendo esse vértice, é ortogonal ao plano da base. Centradas nos vértices desse cubo, foram construídas oito esferas metálicas, e uma outra esfera foi construída centrada no ponto de interseção das diagonais do cubo. As oito esferas sobre os vértices são interligadas segundo suas arestas, e a esfera central se conecta a elas pelas diagonais do cubo. Todas essas interligações são feitas por tubos cilíndricos que possuem escadas em seu interior, permitindo o deslocamento de pessoas pela parte interna da estrutura. Na diagonal ortogonal à base, o deslocamento é feito por um elevador, que permite o deslocamento entre as esferas da base e a esfera do ponto mais alto, passando pela esfera central.

Considere um visitante que se deslocou pelo interior do Atomium sempre em linha reta e seguindo o menor trajeto entre dois vértices, passando por todas as arestas e todas as diagonais do cubo. A projeção ortogonal sobre o plano do solo do trajeto percorrido por esse visitante é representada por



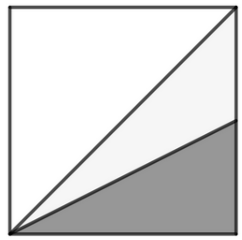
Resolução: Alternativa (E).

15. (OBMEP - Banco de Questões 2019) Na figura a seguir, temos um quadrado dividido em dois triângulos congruentes e um triângulo retângulo cujo cateto maior tem a mesma medida do lado do quadrado e o cateto menor tem a metade da medida do lado do quadrado.

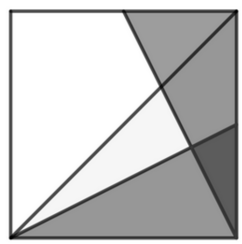


Se a área do quadrado é $4k$, determine:

a) A área em cinza claro da figura abaixo.



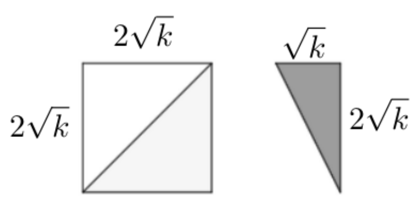
b) A área em cinza escuro da figura abaixo.



Resolução: (por Bruno Carvalho) De acordo com o enunciado, a área do quadrado é

$$\text{lado } \times \text{ lado} = 4k.$$

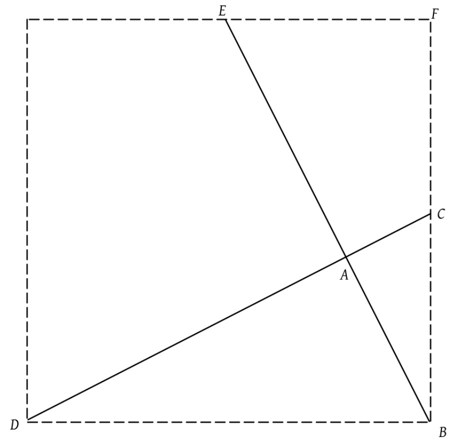
Logo, a medida do lado do quadrado é lado $= \sqrt{4k} = 2\sqrt{k}$, como na figura:



(a) No primeiro caso, a área em cinza claro é dada por metade da área do quadrado menos a área do triângulo em cinza escuro. Logo,

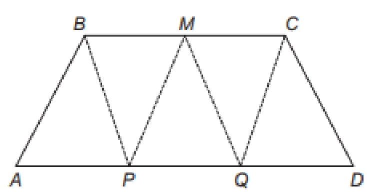
$$\begin{aligned}(\text{área em cinza claro}) &= (\text{metade da área do quadrado}) - \text{área em cinza escuro}\\ &= \frac{4k}{2} - \frac{\sqrt{k} \cdot 2\sqrt{k}}{2} = 2k - k = k.\end{aligned}$$

(b) Essa questão é um pouco mais desafiadora. Na figura a seguir, precisamos encontrar a área do triângulo ABC, que corresponde à área em cinza escuro da figura do enunciado:



1. Sabemos, por um lado, que o ângulo $B\hat{D}C$ é igual ao ângulo $C\hat{B}A$. Por outro lado, $C\hat{B}A + A\hat{B}D = 90$. Logo, $B\hat{A}D = 90$.
2. Por outro lado, sabemos que
$$\tan\left(C\hat{B}A\right) = \tan\left(C\hat{D}B\right) = \frac{CB}{DB} = \frac{1}{2}.$$
Segue que
$$\tan\left(C\hat{B}A\right) = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{2}.$$
3. O Teorema de Pitágoras nos diz que
$$(CA)^2 + (AB)^2 = k.$$
4. Pelos items 2. e 3., temos o sistema:
$$\begin{cases} (CA) = \dfrac{AB}{2}, \\ (CA)^2 + (AB)^2 = k, \end{cases}$$
cuja solução é:
$$(CA) = \frac{\sqrt{5k}}{5}, \qquad (AB) = \frac{2\sqrt{5k}}{5}.$$
5. A área procurada é
$$A = \frac{(CA) \times (AB)}{2} = \frac{k}{5}.$$

16. (ENEM 2019) No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento BC, e os pontos P e Q são obtidos dividindo o segmento AD em três partes iguais.



Pelos pontos B, M, C, P e Q são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura. A razão entre BC e AD que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é

(a) 1/3
(b) 2/3
(c) 2/5
(d) 3/5
(e) 5/6

Resolução: Os triângulos terão áreas iguais se as bases coincidirem em tamanho. Logo, a base do trapézio deve medir $3 \times (BM)$. Sendo assim, a razão procurada é

$$\frac{BC}{AD} = \frac{2 \times BC}{3 \times BC} = \frac{2}{3}.$$

17. (ENEM 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro d = 40 cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é h = 60 cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Qual a soma das medidas das áreas, em centimetros quadrados, das dez placas?
(a) 16 628
(b) 22 280
(c) 28 560
(d) 41 120
(e) 66 240

Resolução: (por Ana Clara) A área de cada uma das placas é a soma da área de um semicírculo de raio $r = d/2 = 20cm$ e a área de um retângulo de dimensões $d = 40cm$ por $h - r = 60 - 20 = 40$ (portanto, um quadrado). Logo

$$\text{Área de uma placa} = \frac{\pi r^2}{2} + 40^2 = \frac{3,14 \cdot 20^2}{2} + 1600 = 2228 \text{ cm}^2.$$

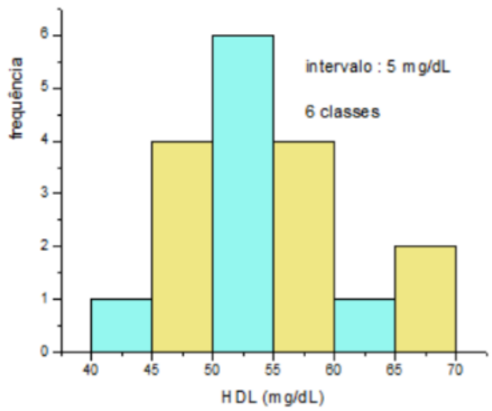
Logo, a soma das medidas das áreas das dez placas é

$$10 \cdot 2228 = 22\ 280,$$

alternativa (b).

Frente 4: Estatística

18. Considere o seguinte historigrama para os níveis de HDL no sangue:

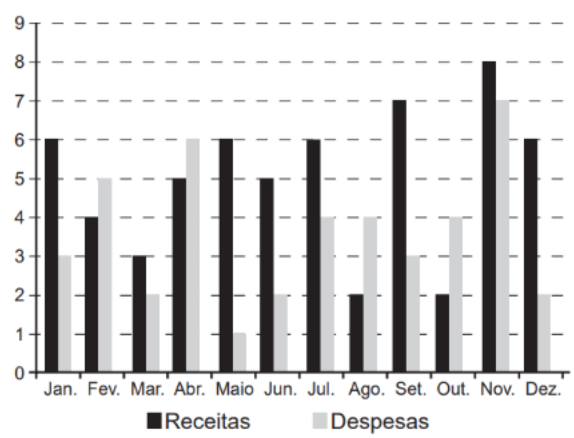


Qual a frequência de pessoas que possuem níveis de HDL na classe modal?

(a) 1.
(b) 2.
(c) 4.
(d) 6.
(e) 8.

Resolução: (por Ivan Slobodcicov) A frequência modal é a que apresenta maior quantidade de vezes. Neste caso, a faixa de 50-55 mg/dL, com frequência de 6 pessoas. Resposta correta **letra d)**.

19. (ENEM 2022) O gráfico apresenta os totais de receitas e despesas de uma empresa, expressos em milhão de reais, no decorrer dos meses de um determinado ano. A empresa obtém lucro quando a diferença entre receita e despesa é positiva e tem prejuízo quando essa diferença é negativa.



Qual é a mediana, em milhão de reais, dos valores dos lucros apurados pela empresa nesse ano?

(a) 1,5
(b) 2

(c) 2,9

(d) 3

(e) 5,5

Resolução: (por Ivan Slobodcicov) De acordo com o enunciado, o lucro é dado por:

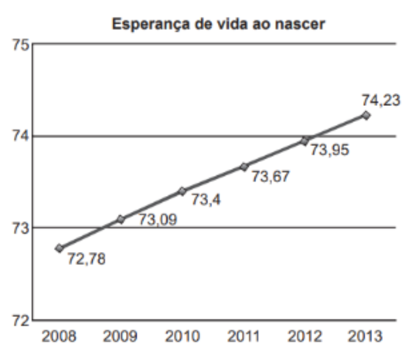
Lucro = Receitas – Despesas, com Lucro ¿ 0

Durante o ano, a empresa obteve o seguinte comportamento, em milhões de R$:

Mês	Receitas	Despesas	Lucro/Prejuízo
Jan	6	3	3
Fev	4	5	-1
Mar	3	2	1
Abr	5	6	-1
Mai	6	1	5
Jun	5	2	3
Jul	6	4	2
Ago	2	4	-2
Set	7	3	4
Out	2	4	-2
Nov	8	7	1
Dez	6	2	4

Considerando apenas os meses em que houve lucro, obtemos 8 valores positivos. A mediana é obtida pela média entre os termos centrais (4o e o 5o termos) quando se colocam os valores em ordem crescente (1, 1, 2, **3, 3**, 4, 4, 5), ou seja $(3 + 3)/2 = 3$. Resposta correta **letra d)**.

20. (ENEM 2022) A esperança de vida ao nascer é o número médio de anos que um individuo tende a viver a partir de seu nascimento, considerando dados da população. No Brasil, esse número vem aumentando consideravelmente, como mostra o gráfico.



Pode-se observar que a esperança de vida ao nascer em 2012 foi exatamente a média das registradas nos anos de 2011 e 2013. Suponha que esse fato também ocorreu com a esperança de vida ao nascer em 2013, em relação às esperanças de vida de 2012 e de 2014. Caso a suposição feita tenha sido confirmada, a esperança de vida ao nascer no Brasil no ano de 2014 terá sido, em ano, igual a

(a) 74,23

(b) 74,51
(c) 75,07
(d) 75,23
(e) 78,49

Resolução: (por Gustavo B. Moraes) Analisando o enunciado, é notório que a relação proposta diz que a esperança de vida ao nascer em um dado ano, é calculada através da média aritmética entre as esperanças de vida do seu ano anterior e o seu ano posterior. Em outras palavras, temos que a esperança de vida ao nascer no ano de 2013 é numericamente igual à média aritmética das esperanças de vida ao nascer dos anos de 2012 e 2014. Com isso em mente, sendo Ev_{14} a esperança de vida ao nascer no ano de 2014, podemos montar a seguinte equação

$$74,23 = \frac{1}{2} \cdot (73,95 + Ev_{14}).$$

Desenvolvendo a equação acima, seremos capazes de determinar que, se a previsão realizada esteja correta, a esperança de vida ao nascer no ano de 2014 será numericamente igual a 74,51.